

SERIE SCHAUUM

MURRAY R. SPIEGEL

Rensselaer Polytechn. Institute

VARIABLES COMPLEXES

**COURS
ET
PROBLEMES**

Nouveau tirage



EDISCIENCE

Groupe McGraw-Hill :

Paris, New York, Londres, Saint Louis, San Francisco, Dusseldorf
Johannesbourg, Madrid, Mexico, Montréal, New Delhi, Panama,
Rio de Janeiro, Singapour, Sydney, Tokyo, Toronto



1976

VARIABLES COMPLEXES, Cours et problèmes, est traduit de :
Theory and Problems of Complex Variables, by Murray, R. Spiegel
Copyright © McGraw-Hill Inc, New York, 1973

ISBN France : 2-7042-0020-3
ISBN Canada : 0-07-084-390-2

La Loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'Article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

Préface

La théorie des fonctions d'une variable complexe, appelée par abrégé "variables complexes" ou "analyse complexe", est l'une des branches les plus belles et les plus utiles des mathématiques. Bien que née dans une atmosphère de mystère, de suspicion et de méfiance ainsi qu'en témoignent les qualificatifs d'"imaginaire" et de "complexe" utilisés dans la terminologie mathématique, cette théorie reçut des bases solides au 19^{ème} siècle grâce aux travaux de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Gauss et d'autres grands mathématiciens.

On considère de nos jours que cette théorie constitue une partie essentielle du bagage mathématique des ingénieurs, physiciens, mathématiciens et autres scientifiques ; ceci est dû, d'un point de vue théorique, au fait que de nombreuses notions mathématiques sont clarifiées et unifiées quand elles sont étudiées du point de vue de la théorie des variables complexes ; d'un point de vue pratique cette théorie est un outil puissant pour la solution de problèmes de diffusion de chaleur, de théorie du potentiel, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, d'aérodynamique, d'élasticité, ainsi que de problèmes concernant d'autres théories scientifiques ou d'autres aspects de la science de l'ingénieur.

Ce livre est conçu pour être utilisé comme un complément à d'autres cours classiques ou comme manuel pour un cours formel de théorie des variables complexes et de leurs applications. Il rendra aussi service aux étudiants en mathématiques, physique, aérodynamique, élasticité ou en tout autre domaine où les méthodes de l'analyse complexe sont utilisées.

Chaque chapitre commence par un exposé clair des définitions, principes et théorèmes, illustré de nombreux exemples. Ceci est suivi d'un ensemble gradué de problèmes résolus et de problèmes supplémentaires. Les problèmes résolus servent à illustrer la théorie et à l'élargir, ils mettent aussi l'accent sur ces notions sans lesquelles l'étudiant se sent en permanence sur un terrain fragile et apportent la répétition des principes fondamentaux, si importante pour une assimilation effective. De nombreuses démonstrations de théorèmes et applications de formules figurent parmi les problèmes résolus. Le grand nombre de problèmes supplémentaires avec réponses donne l'occasion d'une révision complète des notions étudiées dans chaque chapitre.

Les notions étudiées comprennent l'algèbre et la géométrie des nombres complexes, le calcul différentiel et intégral complexe, les séries infinies dont les séries de Taylor et de Laurent, la théorie des résidus et ses applications au calcul d'intégrales et de séries, et la représentation conforme avec des applications tirées de domaines divers. On a ajouté un chapitre de compléments qui se révéleront utiles comme introduction à des cours plus avancés.

On a mis plus de matière dans ce livre, qu'on ne peut étudier lors d'un premier cours. Ceci a été fait pour rendre l'ouvrage d'un emploi plus souple, pour donner un livre de références qui soit pratique et enfin pour stimuler un intérêt ultérieur.

M.R. SPIEGEL
Rensselaer Polytechnic Institute

Table des matières

	Page
Chapitre 1. — LES NOMBRES COMPLEXES	1
L'ensemble des nombres réels. Représentation graphique des nombres réels. L'ensemble des nombres complexes. Opérations fondamentales sur les nombres complexes. Valeur absolue. Fondements axiomatiques de la théorie des nombres complexes. Représentation géométrique des nombres complexes. Forme polaire des nombres complexes. Formule de De Moivre. Racines des nombres complexes. Formule d'Euler. Equations algébriques. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Interprétation vectorielle des nombres complexes. Représentation sphérique des nombres complexes. Projection stéréographique. Produit intérieur, produit extérieur. Coordonnées complexes conjuguées. Ensembles ponctuels	
Chapitre 2. — FONCTIONS, LIMITES, CONTINUITE	33
Variables et fonctions. Fonctions uniformes, fonctions multiformes. Fonctions inverses. Transformations. Coordonnées curvilignes. Les fonctions élémentaires. Points de branchement, coupures. Surfaces de Riemann. Limites. Théorèmes sur les limites. Le point à l'infini. Continuité. Continuité dans un domaine. Théorèmes sur la continuité. Continuité uniforme. Suites. Limite d'une suite. Théorèmes sur les limites de suites. Séries.	
Chapitre 3. — DERIVATION COMPLEXE, EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN	63
Dérivées. Fonctions analytiques. Equations de Cauchy-Riemann. Fonctions harmoniques. Interprétation géométrique de la dérivée. Différentielles. Règles de différentiation. Dérivées des fonctions élémentaires. Dérivées d'ordre supérieur. Règle de L'Hospital. Points singuliers. Familles orthogonales. Courbes. Application à la géométrie et à la mécanique. Opérateurs différentiels complexes. Gradient, divergence, rotationnel et laplacien. Quelques identités faisant intervenir les gradient, divergence et rotationnel.	
Chapitre 4. — INTEGRATION COMPLEXE, THEOREME DE CAUCHY	92
Intégrales curvilignes complexes. Intégrales curvilignes réelles. Relation entre les intégrales curvilignes réelles et complexes. Propriétés des intégrales. Changement de variable. Ouverts simplement connexes et multiplement connexes. Courbes de Jordan. Convention concernant l'orientation d'un contour fermé. Formule de Green dans le plan. Forme complexe de la formule de Green. Théorème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Goursat. Théorème de Morera. Intégrales indéfinies. Intégrales de fonctions particulières. Quelques conséquences du théorème de Cauchy.	
Chapitre 5. — FORMULES INTEGRALES DE CAUCHY, APPLICATIONS	118
Formules intégrales de Cauchy. Quelques théorèmes importants. Théorème de Morera. Inégalités de Cauchy. Théorème de Liouville. Théorème fondamental de l'algèbre. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne. Théorème du module maximum. Théorème du module minimum. Théorème de l'argument. Théorème de Rouché. Formule intégrale de Poisson pour un cercle. Formule intégrale de Poisson pour un demi-plan.	

	Page
Chapitre 6. — SERIES INFINIES. SERIES DE TAYLOR, SERIES DE LAURENT	139
Suites de fonctions. Séries de fonctions. Convergence absolue. Convergence uniforme de suites et séries. Séries entières. Quelques théorèmes importants. Théorèmes généraux. Théorèmes sur la convergence absolue. Critères particuliers de convergence. Théorèmes sur la convergence uniforme. Théorèmes sur les séries entières. Théorème de Taylor. Quelques séries particulières. Théorème de Laurent. Classification des singularités. Fonctions entières. Fonctions méromorphes. Développement de Lagrange. Prolongement analytique.	
Chapitre 7. — LE THEOREME DES RESIDUS. CALCULS D'INTEGRALES ET DE SERIES	172
Résidus. Calcul des résidus. Le théorème des résidus. Calcul d'intégrales définies. Théorèmes particuliers utilisés dans le calcul d'intégrales. Valeur principale des intégrales au sens de Cauchy. Dérivation sous le signe d'intégration. Règle de Leibnitz. Sommes de séries. Développement de Mittag-Leffler. Quelques développements particuliers.	
Chapitre 8. — REPRESENTATION CONFORME	200
Transformations. Jacobien d'une transformation. Transformations complexes. Représentation conforme. Théorème de Riemann sur la représentation conforme. Points fixes ou invariants d'une transformation. Quelques transformations générales. Translation. Rotation. Homothétie. Inversion. Transformations successives. La transformation linéaire. La transformation homographique. Représentation d'un demi-plan sur un cercle. La transformation de Schwarz-Christoffel. Transformation des frontières exprimées sous forme paramétrique. Quelques transformations particulières.	
Chapitre 9. — APPLICATIONS PHYSIQUES DE LA REPRESENTATION CONFORME . .	232
Problèmes aux limites. Fonctions harmoniques et conjuguées. Problèmes de Dirichlet et de Neumann. Le problème de Dirichlet pour le cercle unité. Formule de Poisson. Le problème de Dirichlet pour le demi-plan. Solutions des problèmes de Dirichlet et de Neumann par représentation conforme. Applications à l'écoulement des fluides. Notions fondamentales. Le potentiel complexe. Lignes équipotentiellles et lignes de courant. Sources et puits. Quelques écoulements particuliers. Ecoulements autour d'obstacles. Théorème de Bernoulli. Théorème de Blasius. Applications à l'électrostatique. Loi de Coulomb. Champ électrique. Potentiel électrostatique. Théorème de Gauss. Le potentiel électrostatique complexe. Charges linéaires. Conducteurs. Capacité. Application à la diffusion de la chaleur. La température complexe.	
Chapitre 10. — COMPLEMENTS	265
Prolongement analytique. Principe de symétrie de Schwarz. Produits infinis. Convergence absolue, semi-convergence et convergence uniforme des produits infinis. Quelques théorèmes importants sur les produits infinis. Théorème de Weierstrass sur les produits infinis. Quelques produits infinis particuliers. La fonction gamma. Propriétés de la fonction gamma. La fonction bêta. Equations différentielles. Solutions d'équations différentielles sous forme d'intégrales. Fonctions de Bessel. Fonctions de Legendre. La fonction hypergéométrique. La fonction zêta. Séries asymptotiques. Développements asymptotiques particuliers. Fonctions elliptiques.	
INDEX	274

CHAPITRE 1

Les nombres complexes

L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

Le système numérique tel que nous le connaissons de nos jours est le résultat d'un développement progressif dont les étapes sont les suivantes.

1. **Les entiers naturels** 1, 2, 3, 4, ..., aussi appelés entiers positifs furent utilisés les premiers dans la numération. Les symboles varièrent selon les époques, e.g. les Romains utilisaient I, II, III, IV, ... Si a et b sont des entiers naturels, la somme $a + b$ et le produit $a \cdot b$, $(a)(b)$ ou ab sont aussi des entiers naturels. Pour ces raisons l'ensemble des entiers naturels est dit fermé pour les opérations d'addition et de multiplication, ou satisfait la propriété de fermeture pour ces opérations.
2. **Les entiers négatifs et zéro** notés $-1, -2, -3, \dots$ et 0 respectivement apparurent pour donner des solutions à des équations telles que $x + b = a$ où a et b sont des entiers naturels. Ceci conduit à l'opération de soustraction, ou inverse de l'addition, et nous écrivons $x = a - b$.

L'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nul est appelé l'ensemble des entiers, et est fermé pour les opérations d'addition, de multiplication et de soustraction.

3. **Les nombres rationnels** ou fractions tels que $\frac{3}{4}, -\frac{8}{3}, \dots$ furent introduits pour donner des solutions à des équations telles que $bx = a$, pour tous les entiers a et b où $b \neq 0$. Ceci conduit à l'opération de division ou inverse de la multiplication et nous écrivons $x = a/b$ ou $a \div b$ [appelé le quotient de a par b] où a est le numérateur et b le dénominateur.

L'ensemble des entiers est une partie, ou un sous-ensemble, de l'ensemble des rationnels puisque les entiers correspondent aux nombres rationnels a/b où $b = 1$.

L'ensemble des nombres rationnels est fermé pour les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division si l'on exclut la division par zéro.

4. **Les nombres irrationnels** tels que $\sqrt{2} = 1,41423 \dots$ et $\pi = 3,14159 \dots$ sont les nombres qui ne sont pas rationnels, i.e. ne peuvent pas être exprimés sous la forme a/b avec a et b entiers et $b \neq 0$.

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels. Nous supposons que l'étudiant est familiarisé avec les différentes opérations sur les nombres réels.

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES REELS

Les nombres réels peuvent être représentés par les points d'une droite appelée l'axe réel (Fig. 1-1). Le point correspondant à zéro est appelé l'origine

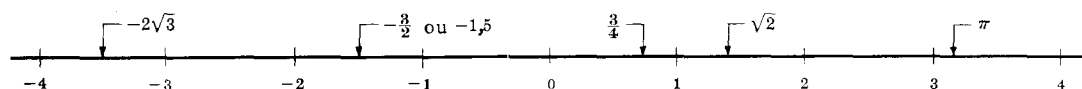


Fig. 1-1

Réciproquement à chaque point de la droite correspond un nombre réel et un seul. Si un point A représentant le nombre réel a est à droite d'un point B représentant le nombre réel b , nous dirons que a est plus grand que b ou b plus petit que a et écrirons respectivement $a > b$ ou $b < a$.

L'ensemble de toutes les valeurs de x telles que $a < x < b$ est appelé un intervalle ouvert de l'axe réel, cependant que $a \leq x \leq b$ qui comprend aussi les extrémités a et b , est appelé un intervalle fermé. Le symbole x qui représente n'importe quel élément de l'ensemble des nombres réels est appelé une variable réelle.

La valeur absolue d'un nombre réel a , notée $|a|$, est égale à a si $a > 0$, à $-a$ si $a < 0$ et à 0 si $a = 0$. La distance qui sépare deux points a et b de l'axe réel est $|a - b|$.

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$. On a introduit l'ensemble des nombres complexes pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables.

Nous pouvons considérer un nombre complexe comme étant de la forme $a + bi$, où a et b sont réels et i , appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$. Si $z = a + bi$, alors a est appelée la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z ; ces parties réelle et imaginaire sont respectivement notées $\operatorname{Re}\{z\}$ et $\operatorname{Im}\{z\}$. Le symbole z qui représente n'importe quel élément de l'ensemble des nombres complexes est appelé une variable complexe.

Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Nous pouvons considérer l'ensemble des nombres réels comme le sous-ensemble des nombres complexes pour lequel $b = 0$. Ainsi les nombres complexes $0 + 0i$ et $-3 + 0i$ représentent respectivement les nombres réels 0 et -3 . Si $a = 0$ le nombre complexe $0 + bi$, ou bi , est appelé imaginaire pur.

Le nombre complexe conjugué, ou plus rapidement conjugué, d'un nombre complexe $a + bi$ est $a - bi$. Le nombre complexe conjugué de z est souvent noté $\bar{z}$ ou z^* .

OPERATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

En effectuant des opérations avec des nombres complexes nous pouvons procéder de même que dans l'algèbre des nombres réels en remplaçant i^2 par -1 .

1. *Addition* $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
2. *Soustraction* $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$
3. *Multiplication* $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
4. *Division*

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2}$$

$$= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

VALEUR ABSOLUE

La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $a + bi$ est définie par $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple : $|-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Si $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ sont des nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

1. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ou $|z_1 z_2 \cdots z_m| = |z_1| |z_2| \cdots |z_m|$
2. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ou $|z_1 + z_2 + \cdots + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|$
4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ou $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

FONDEMENTS AXIOMATIQUES DE LA THEORIE DES NOMBRES COMPLEXES

D'un strict point de vue logique il est souhaitable de définir un nombre complexe comme un couple ordonné (a, b) de nombres réels a et b vérifiant certaines définitions opérationnelles équivalant à celles vues plus haut. Ces définitions sont les suivantes, toutes les lettres représentant des nombres réels.

- A. **Egalité** $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c, b = d$
- B. **Somme** $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- C. **Produit** $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
 $m(a, b) = (ma, mb)$

De ces définitions nous pouvons déduire [Problème 14] que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ et nous pouvons lui associer $a + bi$ où i est le symbole représentant $(0, 1)$ et ayant la propriété $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ [qui peut être considéré comme équivalant au nombre réel -1] et $(1, 0)$ peut être considéré comme équivalant au nombre réel 1. Le couple ordonné $(0, 0)$ correspond au nombre réel 0.

A partir de ce qui précède nous pouvons démontrer que si z_1, z_2, z_3 appartiennent à l'ensemble S des nombres complexes alors

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ appartiennent à S | Propriétés de fermeture |
| 2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ | Commutativité de l'addition |
| 3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ | Associativité de l'addition |
| 4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ | Commutativité de la multiplication |
| 5. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ | Associativité de la multiplication |
| 6. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ | Distributivité |
| 7. $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1, 1 \cdot z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1, 0$ est appelé l'élément neutre pour l'addition, 1 est appelé l'élément neutre de la multiplication. | |
| 8. Pour tout nombre complexe z_1 il existe un nombre complexe unique z tel que $z + z_1 = 0$; z est appelé l'inverse de z_1 pour l'addition et est noté $-z_1$. | |
| 9. Pour tout nombre complexe $z_1 \neq 0$ il existe un nombre complexe unique z tel que $z_1 z = z z_1 = 1$; z est appelé l'inverse de z_1 pour la multiplication et est noté z_1^{-1} ou $1/z_1$. | |

En général tout ensemble tel que S dont les éléments vérifient les propriétés précédentes est appelé un corps.

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Si des échelles réelles sont choisies sur deux axes perpendiculaires $X'OX$ et $Y'OY$ (appelés respectivement l'axe des x et l'axe des y) comme dans la Fig. 1.2, nous pouvons repérer chaque point du plan défini par ces droites au moyen d'un couple ordonné de nombres réels (x, y) appelés coordonnées rectangulaires du point. Des exemples de repérage de tels points P, Q, R, S et T sont indiqués Fig. 1.2.

Un nombre complexe $x + iy$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des xy appelé plan complexe ou diagramme d'Argand. Le nombre complexe représenté par P peut ainsi être lu $(3, 4)$ ou $3 + 4i$. A chaque nombre complexe correspond ainsi un point du plan et un seul, réciproquement à chaque point du plan correspond un nombre complexe et un seul. Pour cette raison nous parlerons souvent indifféremment du nombre complexe z ou du point z .

Nous désignerons souvent par axes réel et imaginaire, respectivement les axes des x et des y et par plan

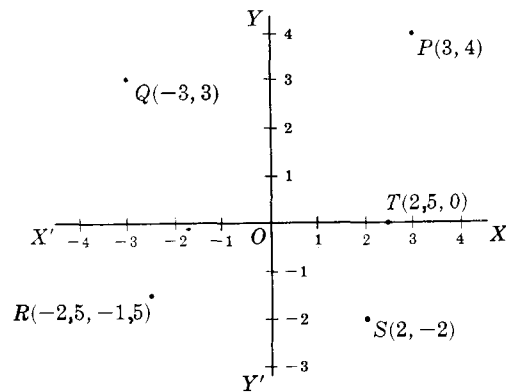


Fig. 1-2

des z le plan complexe. La distance entre deux points $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ du plan complexe est donnée par $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

FORME POLAIRE DES NOMBRES COMPLEXES

Si P désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe (x, y) ou $x + iy$, nous voyons d'après la Fig. 1.3 que

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est appelé le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$ [noté $\text{mod } z$ ou $|z|$]; et θ appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$ [noté $\text{arg } z$] est l'angle que fait le vecteur OP avec le demi-axe positif OX .

On en tire

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1)$$

qui est appelée la forme polaire du nombre complexe, r et θ étant les coordonnées polaires. Il est souvent pratique d'écrire $\text{cis } \theta$ pour $\cos \theta + i \sin \theta$.

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ il correspond une valeur et une seule de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$. Toutefois on peut utiliser n'importe quel autre intervalle de longueur 2π , ainsi par exemple $-\pi < \theta \leq \pi$. Pour un choix déterminé à l'avance la valeur de θ trouvée est appelée la valeur principale.

FORMULE DE DE MOIVRE

Si $z = x_1 + iz_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ nous pouvons montrer que [voir problème 19]

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \quad (3)$$

Une généralisation de (2) conduit à

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\} \quad (4)$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (5)$$

qui est souvent appelée formule de De Moivre.

RACINES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Un nombre w est appelé racine n -ième d'un nombre complexe z si $w^n = z$, et nous écrivons $w = z^{1/n}$. D'après la formule de De Moivre nous pouvons montrer que si n est un entier positif,

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^{1/n} \\ &= r^{1/n} \left\{ \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (6)$$

d'où il résulte qu'il y a n valeurs différentes pour $z^{1/n}$, i.e. n racines n -ièmes différentes de z pourvu que $z \neq 0$.

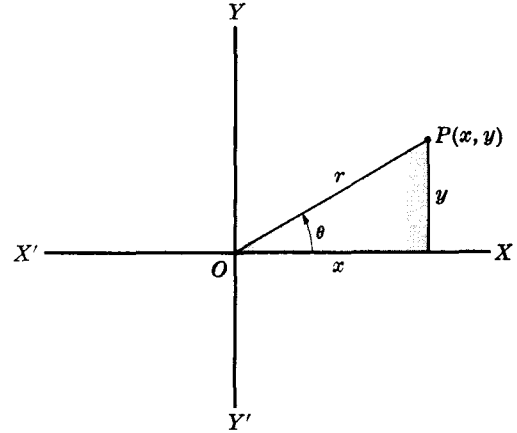


Fig. 1-3

FORMULE D'EULER

En supposant que le développement en série entière $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$ de l'analyse élémentaire conserve un sens quand $x = i\theta$ nous parvenons au résultat

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad e = 2,71828\dots \quad (7)$$

qui est appelé formule d'Euler. En général nous définirons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (8)$$

Dans le cas particulier où $y = 0$, e^z se réduit à e^x .

On notera qu'avec les notations de (7) la formule de De Moivre se réduit à $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

EQUATIONS ALGEBRIQUES

Nous avons souvent dans la pratique à chercher des solutions d'équations algébriques de la forme

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (9)$$

où $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes donnés et n un entier positif appelé le degré de l'équation. De telles solutions sont aussi appelées zéros du polynôme figurant dans le premier membre de (9) ou racines de l'équation (9).

Un théorème très important appelé théorème fondamental de l'algèbre [il sera démontré dans le chapitre 5] établit que toute équation algébrique de la forme (9) a au moins une racine complexe. De là nous pouvons déduire qu'il y a en fait n racines complexes, certaines d'entre elles pouvant être confondues.

Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont les n racines, l'équation (9) peut être écrite sous la forme

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (10)$$

qui est appelée la forme factorisée de l'équation. Réciproquement, si nous pouvons écrire (9) sous la forme (10) nous pourrions aisément en déterminer les racines.

LES RACINES N-IESMES DE L'UNITE

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ où n est un entier positif sont appelées les racines n -ièmes de l'unité et sont données par la formule

$$z = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n = e^{2k\pi i/n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (11)$$

Si l'on pose $\omega = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n = e^{2\pi i/n}$ les n racines sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$. Elles représentent géométriquement les n sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine. Ce cercle a pour équation $|z| = 1$ et est souvent appelé cercle unité.

INTERPRETATION VECTORIELLE DES NOMBRES COMPLEXES

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être considéré comme un vecteur OP dont l'origine est à l'origine O du plan complexe et dont l'extrémité P est le point (x, y) ainsi que le représente la figure 1.4. Deux vecteurs ayant même longueur ou module et mêmes direction et sens mais avec des origines distinctes, tels que OP et AB dans la figure 1.4, sont considérés comme étant égaux. On écrit alors $OP = AB = x + iy$.

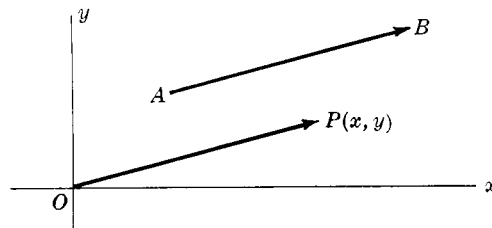


Fig. 1-4

L'addition des nombres complexes correspond alors à la construction du parallélogramme pour la somme de vecteurs [voir figure 1.5]. Ainsi pour additionner les nombres complexes z_1 et z_2 , nous complétons le parallélogramme $OACB$ dont les côtés OA et OC correspondent à z_1 et z_2 . La diagonale OB de ce parallélogramme représente $z_1 + z_2$ (Voir problème 5).

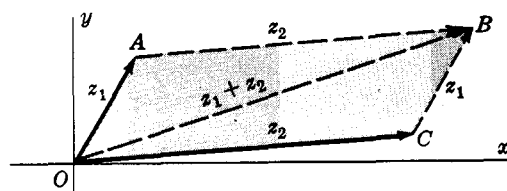


Fig. 1-5

REPRESENTATION SPHERIQUE DES NOMBRES COMPLEXES. PROJECTION STEREOGRAPHIQUE

Soit $\mathcal{P}$ [Fig. 1.6] le plan complexe et considérons une sphère unité $\mathcal{S}$ [de rayon 1] tangente à $\mathcal{P}$ en $z = 0$. Le diamètre NS est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et nous pouvons appeler les points N et S respectivement le pôle Nord et le pôle Sud de $\mathcal{S}$. A chaque point A de $\mathcal{P}$ on peut associer la droite NA qui coupe $\mathcal{S}$ en A' . Ainsi, à chaque point du plan complexe $\mathcal{P}$, il correspond un point et un seul de la sphère $\mathcal{S}$ et nous pouvons représenter tout nombre complexe par un point de la sphère. Pour compléter nous dirons que le point N correspond au "point à l'infini" du plan. L'ensemble de tous les points du plan complexe comprenant le point à l'infini est appelé le plan complexe entier ou le plan complexe complété.

Cette méthode de représentation du plan sur la sphère est appelée projection stéréographique. La sphère est quelquefois appelée sphère de Riemann.

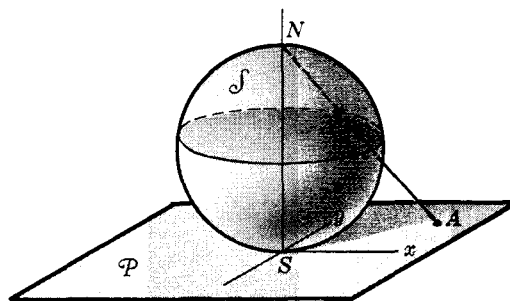


Fig. 1-6

PRODUIT INTERIEUR ET PRODUIT EXTERIEUR

Soit : $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes [vecteurs]. Le produit intérieur [aussi appelé produit scalaire] de z_1 et z_2 est défini par

$$z_1 \circ z_2 = |z_1| |z_2| \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \operatorname{Re} \{ \bar{z}_1 z_2 \} = \frac{1}{2} \{ \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 \} \quad (12)$$

où θ est l'angle compris entre 0 et π que font z_1 et z_2 .

Le produit extérieur de z_1 et z_2 est défini par

$$z_1 \times z_2 = |z_1| |z_2| \sin \theta = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \operatorname{Im} \{ \bar{z}_1 z_2 \} = \frac{1}{2i} \{ \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 \} \quad (13)$$

avec

$$\bar{z}_1 z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1| |z_2| e^{i\theta} \quad (14)$$

Si z_1 et z_2 sont non nuls, alors

1. Une condition nécessaire et suffisante pour que z_1 et z_2 soient orthogonaux est que $z_1 \circ z_2 = 0$.
2. Une condition nécessaire et suffisante pour que z_1 et z_2 soient parallèles est que $z_1 \times z_2 = 0$.
3. La longueur de la projection de z_1 sur z_2 est $|z_1 \circ z_2| / |z_2|$.
4. L'aire du parallélogramme ayant z_1 et z_2 pour côtés est $|z_1 \times z_2|$.

COORDONNEES COMPLEXES CONJUGUEES

Un point du plan complexe peut être repéré par ses coordonnées rectangulaires (x, y) ou polaires (r, θ) . On peut opérer de beaucoup d'autres manières. L'une d'entre elles utilise le fait que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ où $z = x + iy$. Les coordonnées $(z, \bar{z})$ qui déterminent un point sont appelées coordonnées complexes conjuguées, ou plus brièvement coordonnées conjuguées [voir problèmes 43 et 44],

ENSEMBLES DE POINTS

Toute famille de points du plan complexe est appelée un ensemble de points (de dimension deux), et tout point de cette famille est appelé un élément de l'ensemble. Les définitions fondamentales qui suivent sont données ici pour servir de référence.

1. **Voisinages.** Un delta, ou δ , voisinage d'un point z_0 est l'ensemble de tous les points z tels que $|z - z_0| < \delta$ où δ est un nombre positif donné. Un δ voisinage pointé de z_0 est un voisinage de z_0 dans lequel le point z_0 est omis, i.e. $0 < |z - z_0| < \delta$.
2. **Points limites.** Un point z_0 est appelé point limite ou point d'accumulation d'un ensemble de points S si tout δ voisinage pointé de z_0 contient des points de S .
Comme δ peut être un nombre positif quelconque on en déduit que S doit avoir nécessairement une infinité de points. On notera que z_0 peut appartenir ou non à S .
3. **Ensembles fermés.** Un ensemble S est dit fermé si tout point d'accumulation de S appartient à S i.e. si S contient tous ses points d'accumulation. Par exemple l'ensemble des points z tels que $|z| \leq 1$ est un ensemble fermé.
4. **Ensembles bornés.** Un ensemble S est dit borné si l'on peut trouver une constante M telle que $|z| < M$ pour tout point z de S . Un ensemble qui est à la fois fermé et borné est souvent appelé compact.
5. **Intérieur, extérieur et points frontières.** Un point z_0 est appelé point intérieur d'un ensemble S si l'on peut trouver un δ voisinage de z_0 dont tous les points appartiennent à S . Si tout δ voisinage de z_0 contient des points appartenant à S et aussi des points n'appartenant pas à S , alors z_0 est dit point frontière. Un point qui n'est ni point intérieur ni point frontière de S est appelé point extérieur.
6. **Ensembles ouverts.** Un ensemble ouvert est un ensemble qui ne possède que des points intérieurs. Par exemple, l'ensemble des points z tels que $|z| < 1$ est un ensemble ouvert.
7. **Ensembles connexes.** Un ensemble ouvert S est dit connexe si deux points quelconques de S peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites (i.e. un contour polygonal) dont tous les points appartiennent à S .
8. **Réunion et intersection d'ensembles.** Un ensemble formé de tous les points appartenant à l'ensemble S_1 ou à l'ensemble S_2 ou à la fois aux deux ensembles S_1 et S_2 , est appelé la réunion de S_1 et S_2 et est noté $S_1 + S_2$ ou $S_1 \cup S_2$.
Un ensemble formé par tous les points appartenant à la fois à S_1 et à S_2 est appelé l'intersection de S_1 et S_2 et est noté $S_1 S_2$ ou $S_1 \cap S_2$.
9. **Complémentaire d'un ensemble.** Un ensemble formé par tous les points n'appartenant pas à S est appelé le complémentaire de S et est noté $\tilde{S}$.
10. **Ensemble vide et sous-ensembles.** Il est commode de considérer un ensemble ne contenant aucun point. Cet ensemble est appelé l'ensemble vide et est noté $\emptyset$. Si deux ensembles S_1 et S_2 n'ont aucun point en commun (dans ce cas on les appelle disjoints) nous noterons cette propriété en écrivant $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Tout ensemble obtenu en choisissant quelques points de S ou tous les points de S , est appelé un sous-ensemble de S . Si nous excluons le cas où tous les points de S sont choisis, l'ensemble obtenu est appelé un sous-ensemble propre de S .

11. **Ensemble dénombrable.** Si tous les éléments d'un ensemble peuvent être placés en correspondance biunivoque avec les entiers $1, 2, 3, \dots$, l'ensemble est dit dénombrable ; dans le cas contraire il sera dit non dénombrable.

Les deux théorèmes suivants sont importants dans la théorie des ensembles de points.

1. **Théorème de Bolzano-Weierstrass.** Tout ensemble infini et borné a au moins un point d'accumulation.
2. **Théorème de Heine-Borel.** Soit S un ensemble compact dont chaque point est contenu dans au moins un des ensembles ouverts $A_1, A_2, \dots$ [qui sont dits former un recouvrement de S] ; alors il existe un nombre fini d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ qui recouvrent S .

Problèmes résolus

OPERATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1. Effectuer chacune des opérations indiquées.

$$(a) (3 + 2i) + (-7 - i) = 3 - 7 + 2i - i = -4 + i$$

$$(b) (-7 - i) + (3 + 2i) = -7 + 3 - i + 2i = -4 + i$$

Les résultats (a) et (b) illustrent la commutativité de l'addition.

$$(c) (8 - 6i) - (2i - 7) = 8 - 6i - 2i + 7 = 15 - 8i$$

$$(d) (5 + 3i) + \{(-1 + 2i) + (7 - 5i)\} = (5 + 3i) + \{-1 + 2i + 7 - 5i\} = (5 + 3i) + (6 - 3i) = 11$$

$$(e) \{(5 + 3i) + (-1 + 2i)\} + (7 - 5i) = \{5 + 3i - 1 + 2i\} + (7 - 5i) = (4 + 5i) + (7 - 5i) = 11$$

Les résultats (d) et (e) illustrent l'associativité de l'addition.

$$(f) (2 - 3i)(4 + 2i) = 2(4 + 2i) - 3i(4 + 2i) = 8 + 4i - 12i - 6i^2 = 8 + 4i - 12i + 6 = 14 - 8i$$

$$(g) (4 + 2i)(2 - 3i) = 4(2 - 3i) + 2i(2 - 3i) = 8 - 12i + 4i - 6i^2 = 8 - 12i + 4i + 6 = 14 - 8i$$

Les résultats (f) et (g) illustrent la commutativité de la multiplication.

$$(h) (2 - i)\{(-3 + 2i)(5 - 4i)\} = (2 - i)\{-15 + 12i + 10i - 8i^2\} \\ = (2 - i)(-7 + 22i) = -14 + 44i + 7i - 22i^2 = 8 + 51i$$

$$(i) \{(2 - i)(-3 + 2i)\}(5 - 4i) = \{-6 + 4i + 3i - 2i^2\}(5 - 4i) \\ = (-4 + 7i)(5 - 4i) = -20 + 16i + 35i - 28i^2 = 8 + 51i$$

Les résultats (h) et (i) illustrent l'associativité de la multiplication.

$$(j) \quad (-1+2i)\{(7-5i) + (-3+4i)\} = (-1+2i)(4-i) = -4+i+8i-2i^2 = -2+9i$$

Autre méthode $(-1+2i)\{(7-5i) + (-3+4i)\} = (-1+2i)(7-5i) + (-1+2i)(-3+4i)$
 $= \{-7+5i+14i-10i^2\} + \{3-4i-6i+8i^2\}$
 $= (3+19i) + (-5-10i) = -2+9i$

Ceci illustre la propriété de distributivité.

$$(k) \quad \frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

Autre méthode, Par définition $(3-2i)/(-1+i)$ est le nombre $a+bi$, où a et b sont réels, tel que $(-1+i)(a+bi) = -a-b+(a-b)i = 3-2i$. D'où $-a-b=3$, $a-b=2$ et l'on obtient en résolvant, $a=-5/2$, $b=-1/2$ soit $a+bi = -5/2 - i/2$.

$$(l) \quad \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{5+5i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} + \frac{20}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9-16i^2} + \frac{80-60i}{16-9i^2} = \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} = 3-i$$

$$(m) \quad \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15}-(i^2)^9i}{2i-1} = \frac{3(-1)^{15}-(-1)^9i}{-1+2i}$$

$$= \frac{-3+i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

2. Si $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$ et $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, évaluer chacune des expressions suivantes.

$$(a) \quad |3z_1-4z_2| = |3(2+i)-4(3-2i)| = |6+3i-12+8i|$$

$$= |-6+11i| = \sqrt{(-6)^2+(11)^2} = \sqrt{157}$$

$$(b) \quad z_1^3 - 3z_1^2 + 4z_1 - 8 = (2+i)^3 - 3(2+i)^2 + 4(2+i) - 8$$

$$= \{(2)^3 + 3(2)^2(i) + 3(2)(i)^2 + i^3\} - 3(4+4i+i^2) + 8+4i-8$$

$$= 8+12i-6-i-12-12i+3+8+4i-8 = -7+3i$$

$$(c) \quad (\bar{z}_3)^4 = \left(\overline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2\right]^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(d) \quad \left|\frac{2z_2+z_1-5-i}{2z_1-z_2+3-i}\right|^2 = \left|\frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2$$

$$= \left|\frac{3-4i}{4+3i}\right|^2 = \frac{|3-4i|^2}{|4+3i|^2} = \frac{(\sqrt{3^2+(-4)^2})^2}{(\sqrt{4^2+3^2})^2} = 1$$

3. Déterminer les nombres réels x et y tels que $3x+2iy-ix+5y=7+5i$.

L'équation donnée peut être écrite sous la forme $3x+5y+i(2y-x)=7+5i$. D'où en égalant les parties réelles et imaginaires $3x+5y=7$, $2y-x=5$ et en résolvant ce système, $x=-1$, $y=2$.

4. Démontrer que (a) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, (b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

On pose $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. D'où

$$(a) \quad \overline{z_1+z_2} = \overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}$$

$$= \overline{x_1+x_2-i(y_1+y_2)} = \overline{x_1-iy_1+x_2-iy_2} = \overline{x_1+iy_1} + \overline{x_2+iy_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(b) \quad |z_1 z_2| = |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)|$$

$$= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1| |z_2|$$

Autre méthode.

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad \text{or} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

où nous avons utilisé le fait que le conjugué d'un produit de deux nombres complexes est égal au produit des conjugués de chacun des facteurs (voir problème 55).

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES COMPLEXES. VECTEURS.

5. Effectuer les opérations indiquées, à la fois analytiquement et graphiquement.

(a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$, (b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$, (c) $(-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i)$.

(a) *Analytiquement.* $(3 + 4i) + (5 + 2i) = 3 + 5 + 4i + 2i = 8 + 6i$

Graphiquement. Représentons les deux nombres complexes par les points P_1 et P_2 comme dans la figure 1-7 ci-dessous. Complétons le parallélogramme de côtés adjacents OP_1 et OP_2 . Le point P représente la somme $8 + 6i$ des deux nombres complexes donnés. On notera la similitude avec la loi d'addition des vecteurs OP_1 et OP_2 ; pour cette raison il est souvent commode de considérer un nombre complexe $a + bi$ comme un vecteur de composantes a et b sur les axes des x et des y .

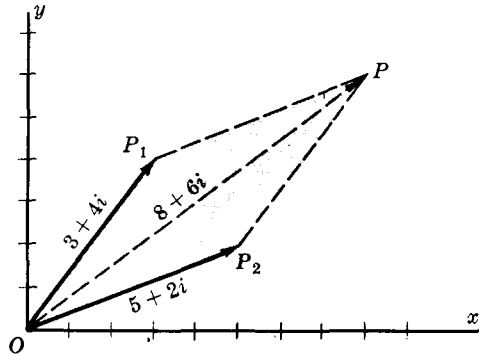


Fig. 1-7

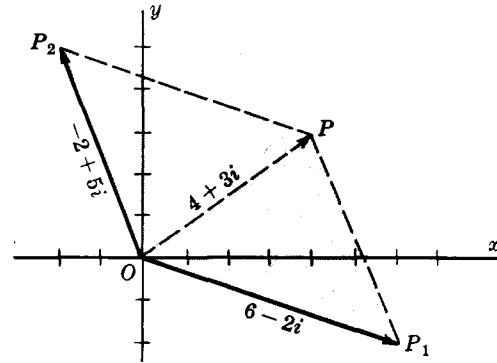


Fig. 1-8

(b) *Analytiquement.* $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2 - 2i + 5i = 4 + 3i$

Graphiquement. $(6 - 2i) - (2 - 5i) = 6 - 2i + (-2 + 5i)$. Nous additionnons alors $(6 - 2i)$ et $(-2 + 5i)$ comme dans (a). Le résultat est donné par OP dans la figure 1.8 ci-dessus.

(c) *Analytiquement.*

$$(-3 + 5i) + (4 + 2i) + (5 - 3i) + (-4 - 6i) = (-3 + 4 + 5 - 4) + (5i + 2i - 3i - 6i) = 2 - 2i$$

Graphiquement. Représentons les nombres à additionner par z_1, z_2, z_3, z_4 respectivement. Ces nombres sont représentés graphiquement dans la figure 1-9. Pour trouver la somme demandée procédons ainsi qu'il est indiqué figure 1-10. Construisons le vecteur z_2 ayant pour origine l'extrémité du vecteur z_1 . On construit ensuite le vecteur z_3 ayant pour origine l'extrémité de z_2 puis z_4 dont l'origine est l'extrémité de z_3 . La somme demandée, souvent appelée la résultante, est le vecteur OP dont l'origine est l'origine de z_1 et dont l'extrémité est l'extrémité de z_4 , i.e. $OP = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 - 2i$.

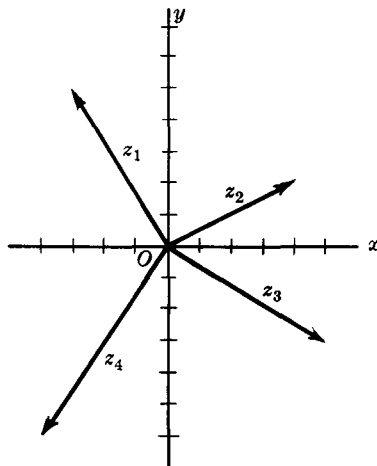


Fig. 1-9

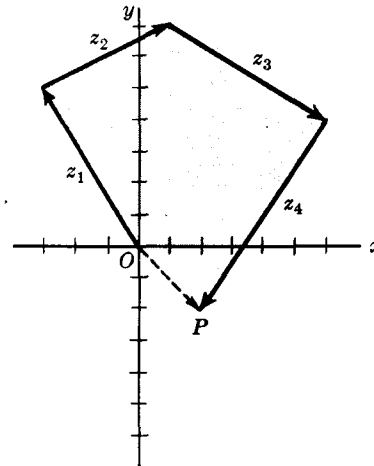


Fig. 1-10

6. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes donnés (vecteurs) tels que dans la figure 1-11, construire graphiquement

(a) $3z_1 - 2z_2$, (b) $\frac{1}{2}z_2 + \frac{5}{3}z_1$.

- (a) Dans la figure 1-12 ci-dessous, $OA = 3z_1$ est un vecteur ayant une longueur triple de celle de z_1 , même direction et même sens.

$OB = -2z_2$ est un vecteur de longueur double de celle de z_2 , même direction et sens opposé.

Alors $OC = OA + OB = 3z_1 - 2z_2$.

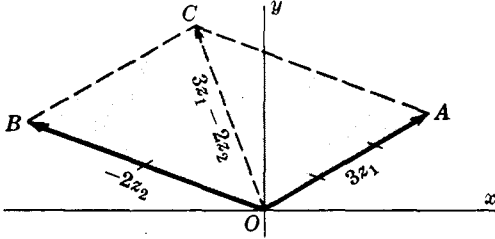


Fig. 1-12

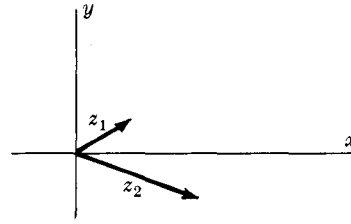


Fig. 1-11

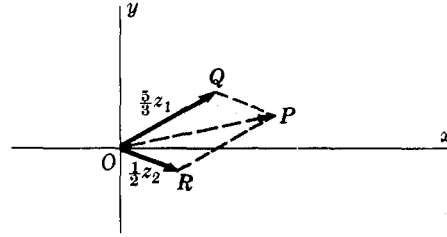


Fig. 1-13

- (b) Le vecteur cherché (nombre complexe) est représenté par OP dans la figure 1-13 ci-dessus.

7. Montrer que (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (b) $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, (c) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ et donner une interprétation graphique.

- (a) Analytiquement. Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Nous devons alors montrer que

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

En élevant au carré les deux membres, ceci sera vérifié si

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

i.e. si

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

ou si (en élevant encore au carré les deux membres) :

$$x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \leq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2$$

ou

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2$$

Mais ceci est équivalent à $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ qui est vrai. En remontant les étapes du raisonnement, ce qui est possible, on trouve le résultat demandé.

Graphiquement. Le résultat provient graphiquement du fait que $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ représentent les longueurs des côtés d'un triangle (voir figure 1-14) et que la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure ou égale à la longueur du troisième côté.

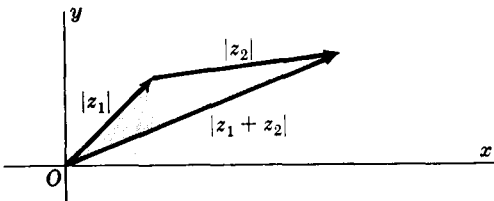


Fig. 1-14

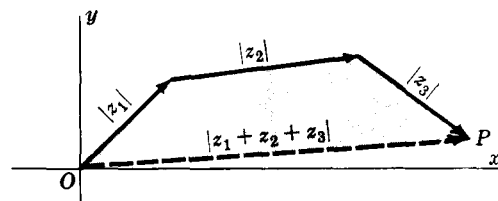


Fig. 1-15

- (b) Analytiquement. A l'aide de (a)

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + (z_2 + z_3)| \leq |z_1| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Graphiquement. Le résultat est la conséquence de la propriété géométrique qui établit que dans un plan la ligne droite réalise le trajet le plus court entre deux points O et P (voir fig. 1-15).

(c) Analytiquement. A l'aide de (a), $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$. D'où $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Un résultat équivalent obtenu en remplaçant z_2 par $-z_2$ est $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Graphiquement. Il est équivalent d'établir qu'un côté d'un triangle a une longueur supérieure ou égale à la différence des longueurs des deux autres côtés.

8. Soit z_1 et z_2 les nombres complexes associés aux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$. (a) Quel est le nombre complexe associé au vecteur AB ? (b) Trouver la distance séparant les points A et B .

(a) D'après la figure 1-16, $OA + AB = OB$ soit

$$\begin{aligned} AB &= OB - OA = z_2 - z_1 \\ &= (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) \\ &= (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

(b) La distance séparant A et B est donnée par

$$|AB| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

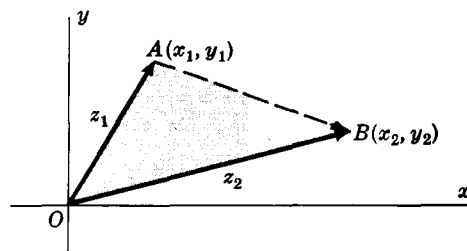


Fig. 1-16

9. On considère les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ représentant deux vecteurs non parallèles. Si a et b sont des nombres réels (scalaires) tels que $az_1 + bz_2 = 0$, montrer que $a = 0$ et $b = 0$.

La condition imposée $az_1 + bz_2 = 0$ est équivalente à $a(x_1 + iy_1) + b(x_2 + iy_2) = 0$ ou $ax_1 + bx_2 + i(ay_1 + by_2) = 0$. D'où $ax_1 + bx_2 = 0$ et $ay_1 + by_2 = 0$. Ce système admet la solution $a = 0$, $b = 0$ si $y_1/x_1 \neq y_2/x_2$ c'est-à-dire si les vecteurs ne sont ni colinéaires, ni parallèles.

10. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

Soit $OABC$ [Fig. 1-17] le parallélogramme donné dont les diagonales se coupent en P .

Puisque $z_1 + AC = z_2$, $AC = z_2 - z_1$. D'où $AP = m(z_2 - z_1)$ avec $0 \leq m \leq 1$.

Puisque $OB = z_1 + z_2$, $OP = n(z_1 + z_2)$ avec $0 \leq n \leq 1$.

Mais $OA + AP = OP$, i.e. $z_1 + m(z_2 - z_1) = n(z_1 + z_2)$ ou $(1 - m - n)z_1 + (m - n)z_2 = 0$. D'où en utilisant le problème 9, $1 - m - n = 0$, $m - n = 0$ soit $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ et donc P est le milieu de chacune des diagonales.

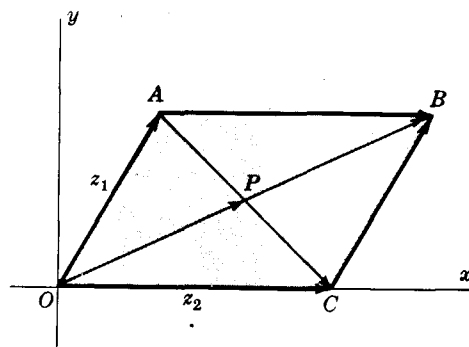


Fig. 1-17

11. Trouver l'équation de la droite qui passe par deux points donnés $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$.

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ les nombres complexes associés à A et B . Notons par $z = x + iy$ le nombre complexe associé à un point P quelconque de la droite joignant A et B .

D'après la figure 1-18,

$$OA + AP = OP \text{ ou } z_1 + AP = z, \text{ i.e. } AP = z - z_1$$

$$OA + AB = OB \text{ ou } z_1 + AB = z_2, \text{ i.e. } AB = z_2 - z_1$$

Puisque AP et AB sont colinéaires, $AP = tAB$ ou $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$ avec t réel, et l'équation demandée est

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{ou} \quad z = (1 - t)z_1 + tz_2$$

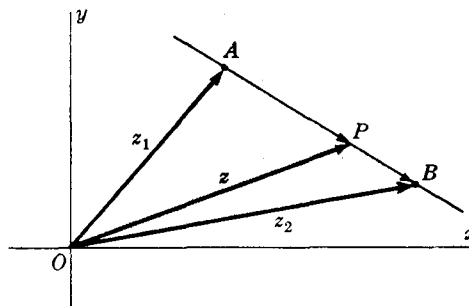


Fig. 1-18

En utilisant le fait que $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ et $z = x + iy$ ceci peut être écrit sous l'une des deux formes

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad \text{ou} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

La première forme est appelée l'équation paramétrique de la droite et t est le paramètre.

Autre méthode. AP et PB étant colinéaires il existe des nombres réels m et n tels que

$$mAP = nPB \quad \text{ou} \quad m(z - z_1) = n(z_2 - z)$$

$$\text{Soit en résolvant} \quad z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n} \quad \text{ou} \quad x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n}, \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

12. Soit $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$, $C(2, 2)$ les trois sommets d'un triangle ABC . Trouver la longueur de la médiane issue de C .

Les nombres complexes associés à A , B et C sont respectivement $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ et $z_3 = 2 + 2i$. Alors d'après la figure 1-19,

$$AC = z_3 - z_1 = 2 + 2i - (1 - 2i) = 1 + 4i$$

$$BC = z_3 - z_2 = 2 + 2i - (-3 + 4i) = 5 - 2i$$

$$AB = z_2 - z_1 = -3 + 4i - (1 - 2i) = -4 + 6i$$

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(-4 + 6i) = -2 + 3i \quad \text{car } D \text{ est le milieu de } AB.$$

$$AC + CD = AD \quad \text{ou} \quad CD = AD - AC = -2 + 3i - (1 + 4i) = -3 - i.$$

La longueur de la médiane CD est donc $|CD| = |-3 - i| = \sqrt{10}$.

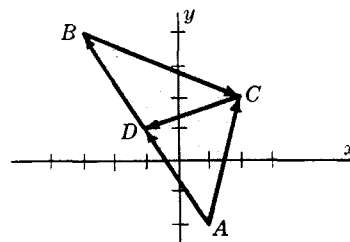


Fig. 1-19

13. Trouver l'équation (a) d'un cercle de rayon 4 centré en $(-2, 1)$, (b) d'une ellipse de foyers $(-3, 0)$ et $(3, 0)$ dont la longueur du grand axe est 10.

(a) Le centre peut être représenté par le nombre complexe $-2 + i$. Si z est un point quelconque du cercle [Fig. 1-20], la distance de z à $-2 + i$ est

$$|z - (-2 + i)| = 4$$

Alors $|z + 2 - i| = 4$ est l'équation demandée. En coordonnées cartésiennes on obtient

$$(x + 2) + i(y - 1) = 4, \quad \text{i.e.} \quad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

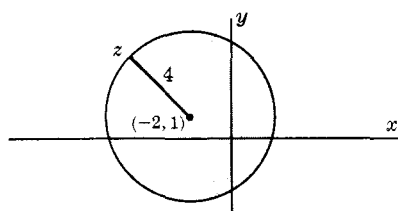


Fig. 1-20

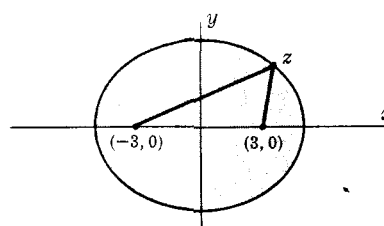


Fig. 1-21

(b) La somme des distances d'un point quelconque z de l'ellipse [Fig. 1-21] aux deux foyers est égale à 10. L'équation demandée est donc

$$|z + 3| + |z - 3| = 10$$

En coordonnées rectangulaires ceci se réduit à $x^2/25 + y^2/16 = 1$ (voir problème 74).

FONDEMENTS AXIOMATIQUES DE LA THEORIE DES NOMBRES COMPLEXES.

14. En utilisant la définition d'un nombre complexe comme un couple ordonné de nombres réels et la définition de la page 3, montrer que $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ avec $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

A partir de la définition de la somme et du produit de la page 2 nous avons

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

où $(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$

En identifiant $(1, 0)$ avec 1 et $(0, 1)$ avec i , nous voyons que $(a, b) = a + bi$.

15. Si $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ et $z_3 = (a_3, b_3)$ démontrer la distributivité $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } z_1(z_2 + z_3) &= (a_1, b_1)\{(a_2, b_2) + (a_3, b_3)\} = (a_1, b_1)(a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= \{a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)\} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_3 + b_1 a_3) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

FORME POLAIRE DES NOMBRES COMPLEXES.

16. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

(a) $2 + 2\sqrt{3}i$.

Module ou valeur absolue, $r = |2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4$.

Amplitude ou argument, $\theta = \text{Arc sin } 2\sqrt{3}/4 = \text{Arc sin } \sqrt{3}/2 = 60^\circ = \pi/3$ (radians).

Donc

$$\begin{aligned} 2 + 2\sqrt{3}i &= r(\cos \theta + i \sin \theta) = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= 4(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) \end{aligned}$$

Le résultat peut aussi être écrit à l'aide de la formule d'Euler sous la forme $4e^{\pi i/3}$.

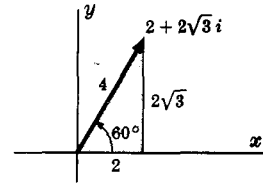


Fig. 1-22

(b) $-5 + 5i$

$$r = |-5 + 5i| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$$\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ = 3\pi/4 \text{ (radians)}$$

d'où $-5 + 5i = 5\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
 $= 5\sqrt{2} \text{ cis } 3\pi/4 = 5\sqrt{2} e^{3\pi i/4}$

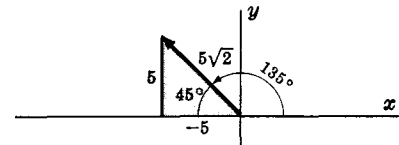


Fig. 1-23

(c) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$

$$r = |-\sqrt{6} - \sqrt{2}i| = \sqrt{6 + 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = 7\pi/6 \text{ (radians)}$$

d'où $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$
 $= 2\sqrt{2} \text{ cis } 7\pi/6 = 2\sqrt{2} e^{7\pi i/6}$

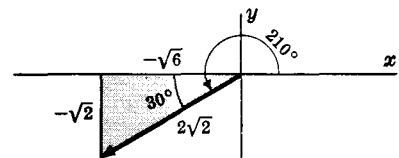


Fig. 1-24

(d) $-3i$

$$r = |-3i| = |0 - 3i| = \sqrt{0 + 9} = 3$$

$$\theta = 270^\circ = 3\pi/2 \text{ (radians)}$$

d'où $-3i = 3(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2)$
 $= 3 \text{ cis } 3\pi/2 = 3e^{3\pi i/2}$

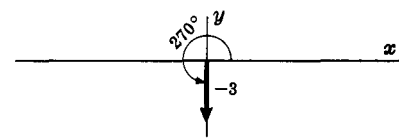


Fig. 1-25

17. Représenter graphiquement chacun des nombres complexes suivants : (a) $6(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$, (b) $4e^{3\pi i/5}$, (c) $2e^{-\pi i/4}$.

(a) $6(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 6 \text{ cis } 240^\circ = 6 \text{ cis } 4\pi/3 = 6e^{4\pi i/3}$

peut être représenté graphiquement par OP dans la figure 1-26.

A partir du vecteur OA de longueur 6, porté par l'axe $x'Ox$ et de même sens que celui-ci, nous pouvons obtenir OP par une rotation de 240° dans le sens direct. En général $re^{i\theta}$ représente un vecteur obtenu en faisant tourner un vecteur de longueur r porté par l'axe des x , de même sens, d'un angle θ dans le sens trigonométrique.

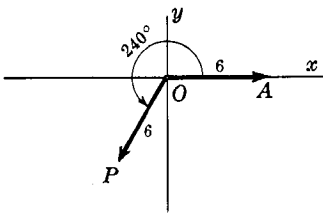


Fig. 1-26

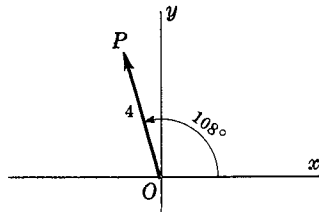


Fig. 1-27

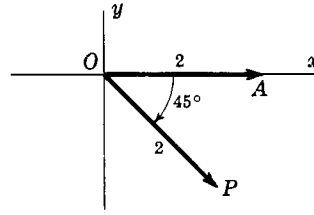


Fig. 1-28

$$(b) \quad 4 e^{3\pi i/5} = 4(\cos 3\pi/5 + i \sin 3\pi/5) = 4(\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ)$$

est représenté par OP dans la figure 1-27 ci-dessus.

$$(c) \quad 2 e^{-\pi i/4} = 2\{\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)\} = 2\{\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)\}$$

Ce nombre complexe peut être représenté par le vecteur OP de la figure 1-28 ci-dessus. Ce vecteur peut être obtenu par rotation du vecteur OA , de module 2, porté par l'axe des x et de même sens que celui-ci, d'un angle de -45° .

18. Un homme parcourt 12 km dans la direction Nord. Est, 20 km 30° Ouest vers le Nord puis 18 km 60° Sud de la direction Ouest. Déterminer (a) analytiquement, (b) graphiquement, à quelle distance et dans quelle direction il est de son point de départ.

- (a) *Analytiquement.* Soit O le point de départ (voir Fig. 1-29). Les déplacements successifs sont alors représentés par les vecteurs OA , AB et BC . Le résultat de ces trois déplacements est représenté par le vecteur

$$OC = OA + AB + BC$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part} \quad OA &= 12(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 12 e^{\pi i/4} \\ AB &= 20\{\cos(90^\circ + 30^\circ) + i \sin(90^\circ + 30^\circ)\} = 20 e^{2\pi i/3} \\ BC &= 18\{\cos(180^\circ + 60^\circ) + i \sin(180^\circ + 60^\circ)\} = 18 e^{4\pi i/3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} OC &= 12 e^{\pi i/4} + 20 e^{2\pi i/3} + 18 e^{4\pi i/3} \\ &= \{12 \cos 45^\circ + 20 \cos 120^\circ + 18 \cos 240^\circ\} + i\{12 \sin 45^\circ + 20 \sin 120^\circ + 18 \sin 240^\circ\} \\ &= \{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(-1/2) + (18)(-1/2)\} + i\{(12)(\sqrt{2}/2) + (20)(\sqrt{3}/2) + (18)(-\sqrt{3}/2)\} \\ &= (6\sqrt{2} - 19) + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i \end{aligned}$$

Si $r(\cos \theta + i \sin \theta) = 6\sqrt{2} - 19 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})i$, alors $r = \sqrt{(6\sqrt{2} - 19)^2 + (6\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = 14,7$ approximativement et $\theta = \text{Arc cos } (6\sqrt{2} - 19)/r = \text{Arc cos } (-0,717) = 135^\circ 49'$ approximativement.

L'homme est donc à 14,7 km du point de départ dans la direction $135^\circ 49' - 90^\circ = 45^\circ 49'$ à l'Ouest du Nord.

- (b) *Graphiquement.* En utilisant une unité de longueur convenable telle que PQ de la figure 1-29 qui représente 2 km, et un rapporteur, on construit les vecteurs OA , AB et BC . Alors en déterminant le nombre d'unités portées par OC , et l'angle que fait OC avec l'axe des y , on obtient approximativement le résultat de (a).

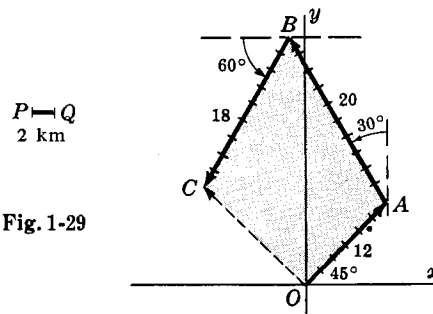


Fig. 1-29

FORMULE DE DE MOIVRE

19. Si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, démontrer que :

$$(a) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$(b) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

$$\begin{aligned} (a) \quad z_1 z_2 &= \{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\} \{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\} \\ &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \left\{ \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \right\} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, le résultat établit que si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

20. Démontrer la formule de De Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ dans laquelle n est un entier positif quelconque.

Nous utiliserons le principe d'induction mathématique. Supposons le résultat vrai pour une valeur particulière k , c'est-à-dire supposons $(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $\cos \theta + i \sin \theta$, nous trouvons alors

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta$$

à l'aide du problème 19. Donc si le résultat est vrai pour $n = k$, il est aussi vrai pour $n = k + 1$. Mais le résultat étant évident pour $n = 1$, il est aussi vrai pour $n = 1 + 1 = 2$ et $n = 2 + 1 = 3$, etc., il est donc vrai pour tous les entiers positifs.

Ce résultat est équivalent à $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

21. Démontrer les identités (a) $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$; (b) $(\sin 5\theta)/(\sin \theta) = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1$, if $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

On utilise la formule de binôme

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$$

où les coefficients $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, également notés C_n^r , sont appelés coefficients du binôme. Le nombre $n!$ ou factorielle n est défini comme étant le produit $1, 2, 3, \dots, n$ et l'on pose $0! = 1$.

A l'aide du problème 20, avec $n = 5$ et au moyen de la formule du binôme,

$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta + i \sin 5\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^5 \\
 &= \cos^5 \theta + \binom{5}{1} (\cos^4 \theta)(i \sin \theta) + \binom{5}{2} (\cos^3 \theta)(i \sin \theta)^2 \\
 &\quad + \binom{5}{3} (\cos^2 \theta)(i \sin \theta)^3 + \binom{5}{4} (\cos \theta)(i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5 \\
 &= \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta \\
 &\quad - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta \\
 &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\
 &\quad + i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\
 &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\
 &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta
 \end{aligned}$$

et

$$(b) \quad \sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

ou

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} &= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\
 &= 5 \cos^4 \theta - 10 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta)^2 \\
 &= 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1
 \end{aligned}$$

pourvu que $\sin \theta \neq 0$, i.e. $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

22. Montrer que (a) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, (b) $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Nous avons

$$(1) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (2) \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

- (a) Par addition de (1) et (2), $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ ou $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- (b) En retranchant (2) et (1), $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$ ou $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

23. Démontrer les identités (a) $\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$, (b) $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$.

$$\begin{aligned} (a) \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{8i^3} = -\frac{1}{8i} \{ (e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3 \} \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \frac{3}{4} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} \right) \\ &= \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4}{16} \\ &= \frac{1}{16} \{ (e^{i\theta})^4 + 4(e^{i\theta})^3(e^{-i\theta}) + 6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2 + 4(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^3 + (e^{-i\theta})^4 \} \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \right) + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

24. Etant donné un nombre complexe (vecteur) z interpréter géométriquement $ze^{i\alpha}$ où α est réel.

Soit OA le vecteur de la figure 1.30 associé au nombre complexe $z = re^{i\theta}$. Alors

$$ze^{i\alpha} = re^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

est le vecteur OB .

La multiplication d'un vecteur z par $e^{i\alpha}$ revient donc à lui faire subir une rotation d'un angle α dans le sens direct. Nous pouvons donc considérer $e^{i\alpha}$ comme un opérateur de rotation.

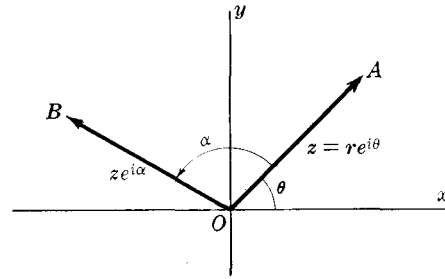


Fig. 1-30

25. Montrer que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta+2k\pi) + i \sin(\theta+2k\pi) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

26. Evaluer chacune des expressions suivantes

$$\begin{aligned} (a) [3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)][4(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)] &= 3 \cdot 4 [\cos(40^\circ + 80^\circ) + i \sin(40^\circ + 80^\circ)] \\ &= 12(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ &= 12 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -6 + 6\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{(2 \text{ cis } 15^\circ)^7}{(4 \text{ cis } 45^\circ)^3} &= \frac{128 \text{ cis } 105^\circ}{64 \text{ cis } 135^\circ} = 2 \text{ cis } (105^\circ - 135^\circ) \\ &= 2[\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)] = 2[\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ] = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$(c) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10} = \left\{ \frac{2 \text{ cis } (60^\circ)}{2 \text{ cis } (-60^\circ)} \right\}^{10} = (\text{cis } 120^\circ)^{10} = \text{cis } 1200^\circ = \text{cis } 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10} &= \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} \right)^{10} = (e^{2i\pi/3})^{10} = e^{20i\pi/3} \\ &= e^{6\pi i} e^{2\pi i/3} = (1)[\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

27. Montrer que pour des déterminations convenables (a) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,
 (b) $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Soit $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Alors $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$.

(a) On tire de $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$, $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

(b) On tire de $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\}$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$.

Du fait qu'il y a plusieurs valeurs possibles pour $\theta_1 = \arg z_1$ et $\theta_2 = \arg z_2$, nous pouvons seulement déduire que les égalités ci-dessous sont vérifiées pour des valeurs convenables de $\arg z_1$ et $\arg z_2$. Elles peuvent ne pas l'être pour les déterminations principales.

RACINES DES NOMBRES COMPLEXES

28. (a) Trouver toutes les valeurs de z telles que $z^5 = -32$, et (b) préciser leur répartition dans le plan complexe.

(a) Sous forme polaire, $-32 = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. D'après la formule de De Moivre

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i \sin 5\theta) = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)\}$$

et donc $r^5 = 32$, $5\theta = \pi + 2k\pi$, soit $r = 2$, $\theta = (\pi + 2k\pi)/5$, d'où

$$z = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) \right\}$$

Si $k = 0$, $z = z_1 = 2(\cos \pi/5 + i \sin \pi/5)$.

Si $k = 1$, $z = z_2 = 2(\cos 3\pi/5 + i \sin 3\pi/5)$.

Si $k = 2$, $z = z_3 = 2(\cos 5\pi/5 + i \sin 5\pi/5) = -2$.

Si $k = 3$, $z = z_4 = 2(\cos 7\pi/5 + i \sin 7\pi/5)$.

Si $k = 4$, $z = z_5 = 2(\cos 9\pi/5 + i \sin 9\pi/5)$.

En considérant $k = 5, 6, \dots$ aussi bien que des valeurs négatives $-1, -2, \dots$ on retrouve les cinq valeurs de z déjà obtenues. Ce sont donc les seules solutions ou racines de l'équation donnée. Ces cinq racines sont appelées racines cinquièmes de -32 et sont notées collectivement $(-32)^{1/5}$. En général, $a^{1/n}$ représente les racines n -ièmes de a et il y en a n .

- (b) Les valeurs de z sont indiquées dans la figure 1-31. On notera qu'elles sont également réparties sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine. Il est équivalent de dire que les racines sont représentées par les sommets d'un polygone régulier.

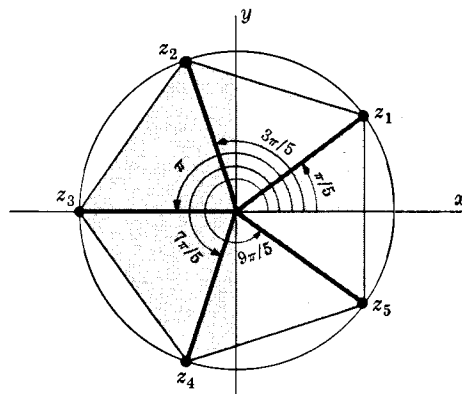


Fig. 1-31

29. Déterminer et représenter dans le plan complexe les racines demandées.

(a) $(-1 + i)^{1/3}$

$$-1 + i = \sqrt{2} \{\cos(3\pi/4 + 2k\pi) + i \sin(3\pi/4 + 2k\pi)\}$$

$$(-1 + i)^{1/3} = 2^{1/6} \left\{ \cos\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) \right\}$$

Si $k = 0$, $z_1 = 2^{1/6}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$.

Si $k = 1$, $z_2 = 2^{1/6}(\cos 11\pi/12 + i \sin 11\pi/12)$.

Si $k = 2$, $z_3 = 2^{1/6}(\cos 19\pi/12 + i \sin 19\pi/12)$.

Ces racines sont représentées dans la figure 1-32.

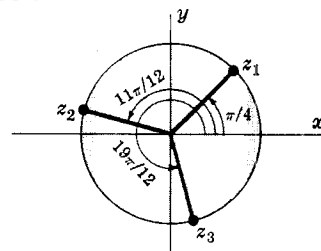


Fig. 1-32

$$(b) (-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$$

$$-2\sqrt{3} - 2i = 4\{\cos(7\pi/6 + 2k\pi) + i \sin(7\pi/6 + 2k\pi)\}$$

$$(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4} = 4^{1/4} \left\{ \cos\left(\frac{7\pi/6 + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi/6 + 2k\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\text{Si } k = 0, \quad z_1 = \sqrt{2}(\cos 7\pi/24 + i \sin 7\pi/24).$$

$$\text{Si } k = 1, \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos 19\pi/24 + i \sin 19\pi/24).$$

$$\text{Si } k = 2, \quad z_3 = \sqrt{2}(\cos 31\pi/24 + i \sin 31\pi/24).$$

$$\text{Si } k = 3, \quad z_4 = \sqrt{2}(\cos 43\pi/24 + i \sin 43\pi/24).$$

Ces racines sont représentées graphiquement à la figure 1-33.

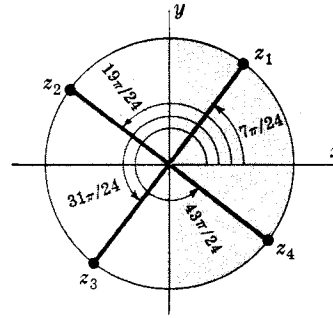


Fig. 1-33

30. Trouver les racines carrées de $-18 - 8i$.

Méthode 1.

$$-15 - 8i = 17\{\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)\} \quad \text{où} \quad \cos \theta = -15/17, \sin \theta = -8/17.$$

Les racines carrées de $-15 - 8i$ sont donc

$$\sqrt{17}(\cos \theta/2 + i \sin \theta/2) \quad (1)$$

$$\text{et} \quad \sqrt{17}\{\cos(\theta/2 + \pi) + i \sin(\theta/2 + \pi)\} = -\sqrt{17}(\cos \theta/2 + i \sin \theta/2) \quad (2)$$

$$\text{De plus} \quad \cos \theta/2 = \pm \sqrt{(1 + \cos \theta)/2} = \pm \sqrt{(1 - 15/17)/2} = \pm 1/\sqrt{17}$$

$$\sin \theta/2 = \pm \sqrt{(1 - \cos \theta)/2} = \pm \sqrt{(1 + 15/17)/2} = \pm 4/\sqrt{17}$$

Comme θ est un angle du troisième quadrant, $\theta/2$ appartient au second quadrant. D'où $\cos \theta/2 = -1/\sqrt{17}$, $\sin \theta/2 = 4/\sqrt{17}$ et de (1) et (2) on déduit que les racines demandées sont $-1 + 4i$ et $1 - 4i$. Comme vérification on note que $(-1 + 4i)^2 = (1 - 4i)^2 = -15 - 8i$.

Méthode 2.

Notons par $p + iq$, avec p et q réels, une des racines demandées. Alors

$$(p + iq)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi = -15 - 8i \quad \text{ou} \quad (3) \quad p^2 - q^2 = -15, \quad (4) \quad pq = -4$$

Substituant $q = -4/p$ de (4) dans (3), il vient $p^2 - 16/p^2 = -15$ ou $p^4 + 15p^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire $(p^2 + 16)(p^2 - 1) = 0$, soit $p^2 = -16$, $p^2 = 1$. Comme p est réel $p = \pm 1$. De (4) si $p = 1$, $q = -4$; si $p = -1$, $q = 4$. Les racines sont donc $-1 + 4i$ et $1 - 4i$.

EQUATIONS ALGEBRIQUES

31. Résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$.

$$\text{En faisant passer } c \text{ dans le deuxième membre et en divisant par } a \neq 0, \quad z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a}$$

$$\text{En additionnant } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ [pour compléter le carré]} \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\text{D'où} \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{En prenant les racines carrées,} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Et donc} \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

32. Résoudre l'équation $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

D'après le problème 31, $a = 1$, $b = 2i - 3$, $c = 5 - i$ et les solutions sont donc

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i - 3) \pm \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(1)(5 - i)}}{2(1)} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} \\ &= \frac{3 - 2i \pm (1 - 4i)}{2} = 2 - 3i \text{ ou } 1 + i \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les racines carrées de $-15 - 8i$ sont $\pm(1 - 4i)$ [voir problème 30]. On vérifie que les valeurs trouvées satisfont l'équation proposée.

33. Si le nombre rationnel p/q (où p et q n'ont d'autre facteur commun que ± 1 et -1 , i.e. p/q irréductible) est solution de l'équation algébrique $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des entiers montrer que p et q sont des diviseurs de a_0 et a_n respectivement.

Après substitution de $z = p/q$ dans l'équation donnée et multiplication par q^n , il vient

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \quad (1)$$

Soit après division par p et passage du dernier terme dans le second membre

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} q^{n-1} = -\frac{a_n q^n}{p} \quad (2)$$

Le membre de gauche étant un entier il en est de même pour le membre de droite. Mais p n'ayant pas de diviseur commun avec q ne peut diviser q^n et doit donc diviser a_n .

De même en divisant (1) par q et en changeant le premier terme de membre on trouvera que q divise a_0 .

34. Résoudre $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$.

Les diviseurs entiers de 6 et -10 sont respectivement $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ et $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. D'où, à l'aide du problème 33 les solutions rationnelles possibles sont $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2, \pm 2/3, \pm 5, \pm 5/2, \pm 5/3, \pm 5/6, \pm 10, \pm 10/3$.

Par essais successifs nous trouvons que $z = -1/2$ et $z = 2/3$ sont solutions et donc le polynôme $(2z + 1)(3z - 2) = 6z^2 - z - 2$ est un facteur de $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10$, l'autre facteur $z^2 - 4z + 5$ étant obtenu par division selon les puissances décroissantes. D'où

$$6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = (6z^2 - z - 2)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

Les solutions de $z^2 - 4z + 5 = 0$ sont [voir problème 31]

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Les racines cherchées sont donc $-1/2, 2/3, 2 + i, 2 - i$.

35. Montrer que la somme et le produit de toutes les racines de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ où $a_0 \neq 0$, sont respectivement $-a_1/a_0$ et $(-1)^n a_n/a_0$.

Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont les n racines, l'équation peut être factorisée sous la forme

$$a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$$

La multiplication des différents facteurs montre que

$$a_0\{z^n - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)z^{n-1} + \dots + (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n\} = 0$$

On en déduit que $-a_0(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = a_1$ et $a_0(-1)^n z_1 z_2 \dots z_n = a_n$, d'où

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -a_1/a_0, \quad z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n a_n/a_0$$

qui est le résultat demandé.

36. Si $p + qi$ est racine de $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ où $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n, p$ et q sont réels, montrer que $p - qi$ est aussi racine.

Soit $re^{i\theta}$ la forme polaire de $p + qi$. L'équation devant être vérifiée pour cette valeur,

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{i\theta} + a_n = 0$$

En prenant les conjugués des deux membres

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \dots + a_{n-1} r e^{-i\theta} + a_n = 0$$

nous voyons que $re^{-i\theta} = p - qi$ est aussi une racine. Le résultat ne s'étend pas aux valeurs de $a_0, a_1, \dots, a_n$ non réelles (voir problème 32).

Ce théorème est souvent énoncé sous la forme suivante : les racines d'un polynôme à coefficients réels sont deux à deux conjuguées.

LES RACINES $n^{\text{ièmes}}$ DE L'UNITÉ

37. Trouver toutes les racines cinquièmes de l'unité.

$$z^5 = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i} \quad \text{où} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Donc
$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} = e^{2k\pi i/5}$$

où il suffit de prendre $k = 0, 1, 2, 3, 4$ les autres valeurs conduisant à des répétitions.

Les racines sont donc $1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}, e^{8\pi i/5}$. Si l'on pose $e^{2\pi i/5} = \omega$, elles peuvent être représentées par $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.

38. Si $n = 2, 3, 4, \dots$, montrer que

$$(a) \quad \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cos \frac{6\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$(b) \quad \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \sin \frac{6\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Considérons l'équation $z^n - 1 = 0$ dont les solutions sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité,

$$1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, e^{6\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n}$$

D'après le problème 35 la somme de ces racines est nulle. D'où

$$1 + e^{2\pi i/n} + e^{4\pi i/n} + e^{6\pi i/n} + \dots + e^{2(n-1)\pi i/n} = 0$$

i.e.,

$$\left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\} + i \left\{ \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\} = 0$$

ce qui établit le résultat demandé.

PRODUITS INTERIEUR ET EXTERIEUR

39. Si $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = -4 + 3i$, trouver (a) $z_1 \circ z_2$, (b) $z_1 \times z_2$.

$$(a) \quad z_1 \circ z_2 = \operatorname{Re} \{ \bar{z}_1 z_2 \} = \operatorname{Re} \{ (3 + 4i)(-4 + 3i) \} = \operatorname{Re} \{ -24 - 7i \} = -24$$

Autre méthode. $z_1 \circ z_2 = (3)(-4) + (-4)(3) = -24$

$$(b) \quad z_1 \times z_2 = \operatorname{Im} \{ \bar{z}_1 z_2 \} = \operatorname{Im} \{ (3 + 4i)(-4 + 3i) \} = \operatorname{Im} \{ -24 - 7i \} = -7$$

Autre méthode. $z_1 \times z_2 = (3)(3) - (-4)(-4) = -7$

40. Trouver l'angle aigu formé par les vecteurs du problème 39.

D'après le problème 39 (a) nous avons $\cos \theta = \frac{z_1 \circ z_2}{|z_1| |z_2|} = \frac{-24}{|3 - 4i| |-4 + 3i|} = \frac{-24}{25} = -0,96$

L'angle cherché est donc $\operatorname{Arc} \cos 0,96 = 16^\circ 16'$ approximativement.

41. Montrer que l'aire du parallélogramme de côtés z_1 et z_2 est $|z_1 \times z_2|$.

Aire du parallélogramme [Fig. 1-34]

$$\begin{aligned} &= (\text{base}) \times (\text{hauteur}) \\ &= (|z_2|)(|z_1| \sin \theta) \\ &= |z_1| |z_2| \sin \theta = |z_1 \times z_2| \end{aligned}$$

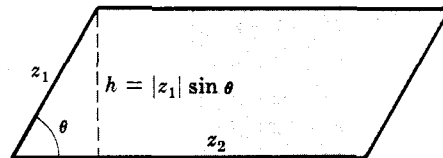


Fig. 1-34

42. Déterminer l'aire du triangle dont les sommets sont $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$.

Les vecteurs d'origine C et d'extrémités A et B [Fig. 1-35] sont respectivement représentés par

$$z_1 = (x_1 - x_3) + i(y_1 - y_3),$$

$$z_2 = (x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)$$

L'aire d'un triangle de côtés z_1 et z_2 étant la moitié de l'aire du parallélogramme correspondant, nous avons au moyen du problème 41 :

$$\begin{aligned} \text{Aire du triangle} &= \frac{1}{2} |z_1 \times z_2| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im} \{[(x_1 - x_3) - i(y_1 - y_3)][(x_2 - x_3) + i(y_2 - y_3)]\}| \\ &= \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_3 y_1 - y_3 x_1| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

sous forme de déterminant.

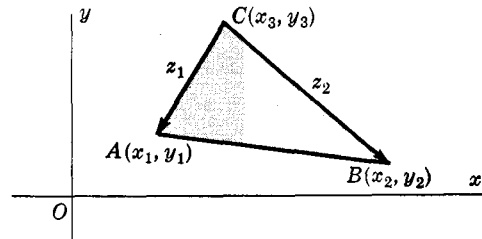


Fig. 1-35

COORDONNEES COMPLEXES CONJUGUEES

43. Exprimer chacune des équations suivantes en coordonnées conjuguées (a) $2x + y = 5$, (b) $x^2 + y^2 = 36$.

(a) Puisque $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Alors $2x + y = 5$ devient

$$2 \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = 5 \quad \text{ou} \quad (2i + 1)z + (2i - 1)\bar{z} = 10i$$

L'équation représente une droite du plan des z .

(b) *Méthode 1.* L'équation est $(x + iy)(x - iy) = 36$ ou $z\bar{z} = 36$.

Méthode 2. Substituant $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ dans $x^2 + y^2 = 36$, on obtient $z\bar{z} = 36$.

L'équation représente un cercle du plan des z , de rayon 6 et centré à l'origine.

44. Montrer que l'équation de tout cercle ou de toute droite du plan complexe peut être mise sous la forme $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ où α et β sont des constantes réelles, β pouvant être complexe.

L'équation générale d'un cercle du plan des xy peut être écrite sous la forme

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

ce qui devient en coordonnées conjuguées

$$Az\bar{z} + B \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + C \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + D = 0 \quad \text{ou} \quad Az\bar{z} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} \right) z + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i} \right) \bar{z} + D = 0$$

En posant $A = \alpha$, $\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} = \beta$ et $D = \gamma$ on obtient le résultat demandé.

Dans le cas spécial $A = \alpha = 0$ le cercle dégénère en droite.

ENSEMBLE DE POINTS

45. Etant donné l'ensemble de points $S : \{i, i/2, i/3, i/4, \dots\}$ ou plus brièvement $\{i/n\}$; (a) S est-il borné ? (b) quels sont ses points d'accumulation s'il y en a ? (c) S est-il fermé ? (d) quels sont les points intérieurs et les points frontières ? (e) S est-il ouvert ? (f) S est-il connexe ? (g) S est-il un ouvert connexe ? (h) Quelle est la fermeture de S ? (i) Quel est le complémentaire de S ? (j) S est-il dénombrable ? (k) S est-il compact ? (l) la fermeture de S est-elle compacte ?

(a) S est borné car pour tout z de S , $|z| < 2$ (par exemple), i.e. tout point de S est intérieur à un cercle de rayon 2 centré à l'origine.

(b) Comme tout voisinage pointé de $z = 0$ contient des points de S , $z = 0$ est un point limite ou d'accumulation ; c'est le seul.

On remarquera que si S est borné et infini, le théorème de Bolzano-Weierstrass prévoit l'existence d'au moins un point d'accumulation.

- (c) S n'est pas fermé car le point d'accumulation $z = 0$ n'appartient pas à S .
- (d) Chaque δ voisinage d'un point i/n [i.e. chaque cercle de rayon δ centré en i/n] contient des points qui appartiennent à S et des points qui n'appartiennent pas à S . Chaque point de S et même $z = 0$ est un point frontière. S ne possède pas de points intérieurs.
- (e) S ne comprend pas de points intérieurs. S n'est donc pas ouvert. S n'est donc ni ouvert ni fermé.
- (f) Si nous joignons deux points de S par un contour polygonal, il y a des points du contour qui n'appartiennent pas à S . S n'est donc pas connexe.
- (g) S n'est donc pas un ouvert connexe.
- (h) La fermeture de S comprend l'ensemble S plus le point limite zéro, i.e. $\{0, i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, \dots\}$.
- (i) Le complémentaire de S est l'ensemble des points n'appartenant pas à S , i.e. tous les points $z \neq i, i/2, i/3, \dots$
- (j) Il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de S et les entiers naturels $1, 2, 3, \dots$ selon le schéma ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccc} i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{3}i & \frac{1}{4}i & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

S est donc dénombrable.

- (k) S est borné mais non fermé. S n'est donc pas compact.
- (l) La fermeture de S est bornée et fermée, elle est donc compacte.

46. Etant donné les ensembles $A = \{3, -i, 4, 2+i, 5\}$, $B = \{-i, 0, -1, 2+i\}$, $C = \{-\sqrt{2}i, \frac{1}{2}, 3\}$. déterminer (a) $A+B$ ou $A \cup B$, (b) AB ou $A \cap B$, (c) AC ou $A \cap C$, (d) $A(B+C)$ ou $A \cap (B \cup C)$, (e) $AB+AC$ ou $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, (f) $A(BC)$ ou $A \cap (B \cap C)$.

(a) $A+B = A \cup B$ est constitué des points appartenant à A ou à B ou bien aux deux ensembles et est donné par $\{3, -i, 4, 2+i, 5, 0, -1\}$.

(b) AB ou $A \cap B$ est constitué par les points appartenant à la fois à A et à B et est donné par $\{-i, 2+i\}$.

(c) AC ou $A \cap C = \{3\}$ ne comporte que l'élément 3.

(d) $B+C$ ou $B \cup C = \{-i, 0, -1, 2+i, -\sqrt{2}i, \frac{1}{2}, 3\}$.

Donc $A(B+C)$ ou $A \cap (B \cup C) = \{3, -i, 2+i\}$ contient les points appartenant à la fois à A et à $B+C$.

(e) $AB = \{-i, 2+i\}$, $AC = 3$ d'après (b) et (c). Donc $AB+AC = \{-i, 2+i, 3\}$.

De ce résultat et de (d) on déduit que $A(B+C) = AB+AC$ ou $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, qui illustre le fait que A, B, C vérifient la propriété de distributivité pour les opérations d'intersection et d'union. On peut démontrer que ces ensembles vérifient beaucoup de propriétés de l'algèbre élémentaire. Ceci présente une grande importance théorique et pratique.

(f) $BC = B \cap C = \emptyset$, l'ensemble vide, car il n'existe pas de point commun à B et à C . De même $A(BC) = \emptyset$.

PROBLEMES DIVERS

47. Un nombre est appelé nombre algébrique s'il est solution d'une équation algébrique

$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ dans laquelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des entiers. Montrer que

(a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et (b) $\sqrt[3]{4} - 2i$ sont des nombres algébriques.

(a) Soit $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ou $z - \sqrt{2} = \sqrt{3}$. Par élévation au carré, $z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 = 3$ ou $z^2 - 1 = 2\sqrt{2}z$.

Au moyen d'une nouvelle élévation au carré, $z^4 - 2z^2 + 1 = 8z^2$ ou $z^4 - 10z^2 + 1 = 0$ qui est une équation algébrique à coefficients entiers ayant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ pour racine. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est donc un nombre algébrique.

(b) Soit $z = \sqrt[3]{4} - 2i$ ou $z + 2i = \sqrt[3]{4}$. Par élévation au cube $z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$ ou $z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2)$. Par élévation au carré $z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$, équation algébrique à coefficients entiers admettant $\sqrt[3]{4} - 2i$ pour racine. $\sqrt[3]{4} - 2i$ est donc un nombre algébrique.

Les nombres qui ne sont pas algébriques, c'est-à-dire qui ne sont solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers, sont dites transcendants. On a démontré que les nombres $\pi = 3,14159\dots$ et $e = 2,71828\dots$ sont transcendants. Toutefois on ne sait toujours pas si des nombres tels que $e\pi$ ou $e + \pi$ sont transcendants ou non.

48. Représenter graphiquement l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles (a) $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2$, (b) $\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2$.

(a) L'équation donnée est équivalente à $|z-3| = 2|z+3|$ ou, si $z = x+iy$, $|x+iy-3| = 2|x+iy+3|$, i.e.,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

Après élévation au carré et simplification, ceci devient

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+5)^2 + y^2 = 16$$

i.e. $|z+5| = 4$, cercle de rayon 4 centré en $(-5, 0)$ représenté à la figure 1-36.

Géométriquement tout point P du cercle est tel que la distance de P au point $B(3, 0)$ est double de la distance de P au point $A(-3, 0)$.

Autre méthode.

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \text{ est équivalent à}$$

$$\left(\frac{z-3}{z+3} \right) \left(\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3} \right) = 4 \quad \text{ou} \quad z\bar{z} + 5\bar{z} + 5z + 9 = 0$$

$$\text{i.e. } (z+5)(\bar{z}+5) = 16 \quad \text{ou} \quad |z+5| = 4.$$

(b) L'inégalité donnée est équivalente à $|z-3| < 2|z+3|$ ou $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$. Après élévation au carré et simplification ceci devient $x^2 + y^2 + 10x + 9 > 0$ ou $(x+5)^2 + y^2 > 16$, i.e. $|z+5| > 4$.

L'ensemble cherché est formé de tous les points extérieurs au cercle de la figure 1-36.

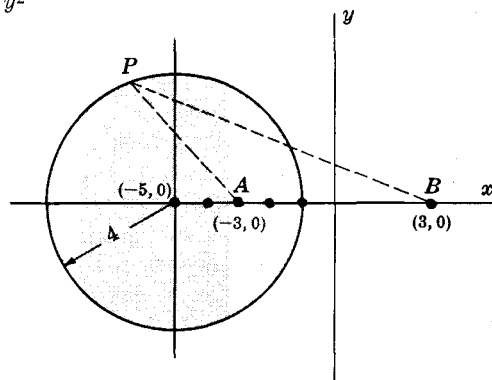


Fig. 1-36

49. Etant donné les ensembles A et B définis par $|z-1| < 3$ et $|z-2i| < 2$ respectivement, représenter géométriquement (a) $A \cap B$ ou AB , (b) $A \cup B$ ou $A+B$.

Les ensembles cherchés sont ombrés dans les figures 1-37 et 1-38 respectivement.

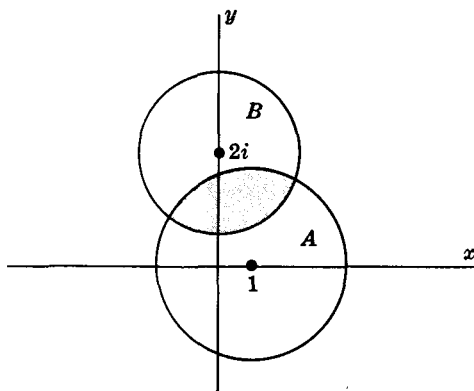


Fig. 1-37

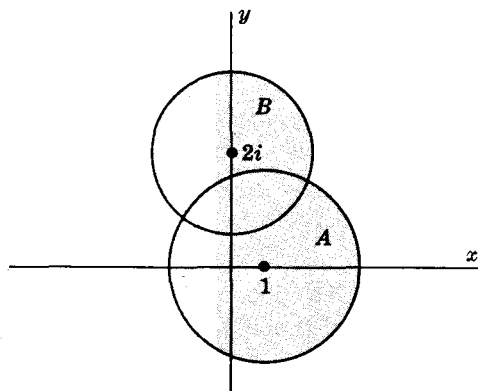


Fig. 1-38

50. Résoudre $z^2(1-z^2) = 16$.

Méthode 1. L'équation peut être écrite $z^4 - z^2 + 16 = 0$, i.e. $z^4 + 8z^2 + 16 - 9z^2 = 0$, $(z^2 + 4)^2 - 9z^2 = 0$ ou $(z^2 + 4 + 3z)(z^2 + 4 - 3z) = 0$. Ses solutions cherchées sont donc les racines de $z^2 + 3z + 4 = 0$ et $z^2 - 3z + 4 = 0$, soit $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$ et $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

Méthode 2. En posant $w = z^2$, l'équation devient $w^2 - w + 16 = 0$, soit $w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}i$. Pour obtenir les solutions de $z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}i$, on peut utiliser les méthodes du problème 30.

51. Si z_1, z_2, z_3 représentent les sommets d'un triangle équilatéral démontrer que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

On voit d'après la figure 1-39, que

$$z_2 - z_1 = e^{\pi i/3} (z_3 - z_1)$$

$$z_1 - z_3 = e^{\pi i/3} (z_2 - z_3)$$

D'où par division $\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$ ou

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

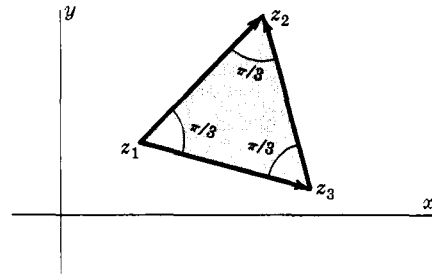


Fig. 1-39

52. Montrer que pour $m = 2, 3, \dots$

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2\pi}{m} \sin \frac{3\pi}{m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Les racines de $z^m = 1$ sont $z = 1, e^{2\pi i/m}, e^{4\pi i/m}, \dots, e^{2(m-1)\pi i/m}$. Nous pouvons donc écrire

$$z^m - 1 = (z - 1)(z - e^{2\pi i/m})(z - e^{4\pi i/m}) \dots (z - e^{2(m-1)\pi i/m})$$

En divisant les deux membres par $z - 1$, puis remplaçant z par 1 [en utilisant $(z^m - 1)/(z - 1) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{m-1}$] on trouve

$$m = (1 - e^{2\pi i/m})(1 - e^{4\pi i/m}) \dots (1 - e^{2(m-1)\pi i/m}) \quad (1)$$

En prenant les complexes conjugués des deux membres de (1) on obtient

$$m = (1 - e^{-2\pi i/m})(1 - e^{-4\pi i/m}) \dots (1 - e^{-2(m-1)\pi i/m}) \quad (2)$$

La multiplication de (1) par (2) à l'aide de $(1 - e^{2k\pi i/m})(1 - e^{-2k\pi i/m}) = 2 - 2 \cos(2k\pi/m)$ donne

$$m^2 = 2^{m-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{m}\right) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{m}\right) \dots \left(1 - \cos \frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \quad (3)$$

D'après $1 - \cos(2k\pi/m) = 2 \sin^2(k\pi/m)$, (3) devient

$$m^2 = 2^{2m-2} \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{2\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{m} \quad (4)$$

D'où le résultat demandé, en prenant la racine carrée positive des deux membres.

Problèmes supplémentaires

OPERATIONS FONDAMENTALES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

53. Effectuer chacune des opérations indiquées :

$$(a) (4 - 3i) + (2i - 8) \quad (e) \frac{2 - 3i}{4 - i} \quad (h) (2i - 1)^2 \left\{ \frac{4}{1 - i} + \frac{2 - i}{1 + i} \right\}$$

$$(b) 3(-1 + 4i) - 2(7 - i) \quad (f) (4 + i)(3 + 2i)(1 - i) \quad (i) \frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$$

$$(c) (3 + 2i)(2 - i) \quad (g) \frac{(2 + i)(3 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - i)^2} \quad (j) 3 \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^3$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Rép. (a)} & -4 - i & (c) & 8 + i & (e) & 11/17 - (10/17)i & (g) & -15/2 + 5i & (i) & 2 + i \\ (b) & -17 + 14i & (d) & -9 + 7i & (f) & 21 + i & (h) & -11/2 - (23/2)i & (j) & -3 - 2i \end{array}$$

54. Si $z_1 = 1 - i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = \sqrt{3} - 2i$, évaluer chacune des expressions suivantes :

$$(a) z_1^2 + 2z_1 - 3 \quad (e) \left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} \right| \quad (h) |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2^2|^2$$

$$(b) |2z_2 - 3z_1|^2 \quad (f) \frac{1}{2} \left(\frac{z_3}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{z_3} \right) \quad (i) \operatorname{Re} \{ 2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2 \}$$

$$(c) (z_3 - \bar{z}_3)^5 \quad (g) \overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)} \quad (j) \operatorname{Im} \{ z_1 z_2 / z_3 \}$$

$$(d) |z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1|$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Rép. (a)} & -1 - 4i & (c) & 1024i & (e) & 3/5 & (g) & -7 + 3\sqrt{3} + \sqrt{3}i & (i) & -35 \\ (b) & 170 & (d) & 12 & (f) & -1/7 & (h) & 765 + 128\sqrt{3} & (j) & (6\sqrt{3} + 4)/7 \end{array}$$

55. Montrer que (a) $(\overline{z_1 z_2}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, (b) $(\overline{z_1 z_2 z_3}) = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$. Généraliser le résultat.
56. Montrer que (a) $(\overline{z_1/z_2}) = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, (b) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ si $z_2 \neq 0$.
57. Trouver des nombres réels x et y tels que $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$.
Rép. : $x = 1, y = -2$.
58. Montrer que (a) $\operatorname{Re}\{z\} = (z + \bar{z})/2$, (b) $\operatorname{Im}\{z\} = (z - \bar{z})/2i$.
59. Montrer que si le produit de deux nombres complexes est nul, l'un au moins d'entre eux est nul.
60. Si $w = 3iz - z^2$ et $z = x + iy$, exprimer $|w|^2$ à l'aide de x et y .
Rép. : $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6x^2y - 6y^3 + 9x^2 + 9y^2$

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES COMPLEXES. VECTEURS

61. Effectuer les opérations indiquées à la fois analytiquement et graphiquement.

$$\begin{array}{lll} (a) (2+3i) + (4-5i) & (c) 3(1+2i) - 2(2-3i) & (e) \frac{1}{2}(4-3i) + \frac{3}{2}(5+2i) \\ (b) (7+i) - (4-2i) & (d) 3(1+i) + 2(4-3i) - (2+5i) & \end{array}$$

Rép. : (a) $6-2i$, (b) $3+3i$, (c) $-1+12i$, (d) $9-8i$, (e) $19/2 + (3/2)i$

62. Si z_1, z_2 et z_3 sont les vecteurs indiqués à la figure 1-40 construire graphiquement :

$$\begin{array}{lll} (a) 2z_1 + z_3 & (c) z_1 + (z_2 + z_3) & (e) \frac{1}{3}z_2 - \frac{3}{4}z_1 + \frac{2}{5}z_3 \\ (b) (z_1 + z_2) + z_3 & (d) 3z_1 - 2z_2 + 5z_3 & \end{array}$$

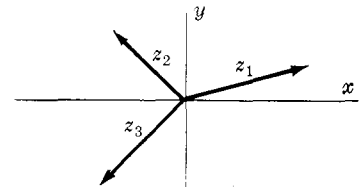


Fig. 1-40

63. Si $z_1 = 4 - 3i$ et $z_2 = -1 + 2i$ calculer graphiquement et analytiquement (a) $|z_1 + z_2|$, (b) $|z_1 - z_2|$, (c) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$, (d) $|2\bar{z}_1 - 3\bar{z}_2 - 2|$.
Rép. : (a) $\sqrt{10}$, (b) $5\sqrt{2}$, (c) $5+5i$, (d) 15
64. Les nombres complexes associés aux sommets d'un triangle ABC étant respectivement $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$ et $z_3 = 1 - 6i$, montrer que ABC est isocèle et déterminer la longueur de ses côtés.
Rép. : 5, 5, 8.

65. Si z_1, z_2, z_3 et z_4 sont les nombres complexes associés aux sommets d'un quadrilatère $ABCD$, montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$.

66. Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, montrer que ce quadrilatère est un parallélogramme.
67. Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.
68. Soit $ABCD$ un quadrilatère, on appelle E, F, G, H les milieux des côtés de $ABCD$. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

69. On considère un parallélogramme $ABCD$ et l'on désigne par E le milieu de AD . Montrer que le point de rencontre de BE et de AC est situé au tiers de AC à partir de A .

70. Si les points A et B sont représentés par les nombres complexes $2 + i$ et $3 - 2i$ (a) déterminer l'équation de la droite AB , (b) déterminer l'équation de la médiatrice de AB .

$$\begin{array}{llll} \text{Rép. : (a) } z - (2+i) = t(1-3i) & \text{ou} & x = 2+t, y = 1-3t & \text{ou} & 3x+y=7 \\ (b) z - (5/2-i/2) = t(3+i) & \text{ou} & x = 3t+5/2, y = t-1/2 & \text{ou} & x-3y=4 \end{array}$$

71. Décrire et représenter graphiquement les courbes représentées par les équations suivantes : (a) $|z - i| = 2$, (b) $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$, (c) $|z - 3| - |z + 3| = 4$, (d) $z(\bar{z} + 2) = 3$, (e) $\operatorname{Im}\{z^2\} = 4$.

Rép. : (a) cercle, (b) ellipse, (c) hyperbole, (d) cercle, (e) hyperbole.

72. Trouver l'équation (a) du cercle de rayon 2 centré en $(-3, 4)$, (b) de l'ellipse de foyers $(0, 2)$ et $(0, -2)$ dont la longueur du grand axe est 10.

$$\text{Rép. : (a) } |z + 3 - 4i| = 2 \text{ ou } (x+3)^2 + (y-4)^2 = 4, (b) |z + 2i| + |z - 2i| = 10$$

73. Représenter graphiquement les régions représentées par chacune des inégalités suivantes :

(a) $1 < |z+i| \leq 2$, (b) $\operatorname{Re}\{z^2\} > 1$, (c) $|z+3i| > 4$, (d) $|z+2-3i| + |z-2+3i| < 10$.

74. Montrer que l'ellipse $|z+3| + |z-3| = 10$ a pour équation cartésienne $x^2/25 + y^2/16 = 1$ [Voir problème 13 (b)].

FONDEMENTS AXIOMATIQUES DE LA THEORIE DES NOMBRES COMPLEXES

75. En utilisant la définition d'un nombre complexe comme couple ordonné de nombres réels, montrer que si le produit de deux nombres complexes est nul, l'un des deux au moins est nul.

76. Démontrer la commutativité de (a) l'addition, (b) la multiplication.

77. Démontrer l'associativité de (a) l'addition, (b) la multiplication.

78. (a) Trouver des nombres réels x et y tels que $(c, d) \cdot (x, y) = (a, b)$ avec $(c, d) \neq (0, 0)$.

(b) De quelle manière (x, y) est-il lié au résultat de la division des nombres complexes donné à la page 2 ?

79. Démontrer que

$$(\cos \theta_1, \sin \theta_1)(\cos \theta_2, \sin \theta_2) \cdots (\cos \theta_n, \sin \theta_n) = (\cos [\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n], \sin [\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n])$$

80. (a) Comment peut-on définir $(a, b)^{1/n}$ où n est un entier positif ? (b) déterminer $(a, b)^{1/2}$ en fonction de a et b .

FORME POLAIRE DES NOMBRES COMPLEXES

81. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

(a) $2-2i$, (b) $-1+\sqrt{3}i$, (c) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, (d) $-i$, (e) -4 , (f) $-2\sqrt{3}-2i$, (g) $\sqrt{2}i$, (h) $\sqrt{3}/2-3i/2$.

Rép. (a) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} 315^\circ$ ou $2\sqrt{2} e^{7\pi i/4}$, (b) $2 \operatorname{cis} 120^\circ$ ou $2e^{2\pi i/3}$, (c) $4 \operatorname{cis} 45^\circ$ ou $4e^{\pi i/4}$, (d) $\operatorname{cis} 270^\circ$ ou $e^{3\pi i/2}$, (e) $4 \operatorname{cis} 180^\circ$ ou $4e^{\pi i}$, (f) $4 \operatorname{cis} 210^\circ$ ou $4e^{7\pi i/6}$, (g) $\sqrt{2} \operatorname{cis} 90^\circ$ ou $\sqrt{2} e^{\pi i/2}$, (h) $\sqrt{3} \operatorname{cis} 300^\circ$ ou $\sqrt{3} e^{5\pi i/3}$.

82. Montrer que $2+i = \sqrt{5} e^{i \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(1/2)}$

83. Mettre sous forme polaire : (a) $-3-4i$, (b) $1-2i$.

Rép. : (a) $e^{i(\pi + \operatorname{Arc} \operatorname{tg} 4/3)}$, (b) $\sqrt{5} e^{-i \operatorname{Arc} \operatorname{tg} 2}$

84. Représenter graphiquement et exprimer en coordonnées cartésiennes les nombres complexes suivants.

(a) $6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, (b) $12 \operatorname{cis} 90^\circ$, (c) $4 \operatorname{cis} 315^\circ$, (d) $2e^{5\pi i/4}$, (e) $5e^{7\pi i/6}$, (f) $3e^{-2\pi i/3}$.

Rép. (a) $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$, (b) $12i$, (c) $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$, (d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, (e) $-5\sqrt{3}/2-(5/2)i$, (f) $-3\sqrt{3}/2-(3/2)i$

85. Un avion parcourt 150 km dans la direction Sud-Est, 100 km vers l'Ouest, 225 km à 30° au Nord de la direction Est puis 200 km dans la direction Nord-Est. Déterminer (a) analytiquement et (b) graphiquement dans quelle direction et à quelle distance il est de son point de départ.

Rép. : 375 km, 23° au Nord de la direction Est (approximativement).

86. Les trois forces représentées dans la figure 1-41 agissent dans un plan sur un objet placé en O . Déterminer (a) graphiquement et (b) analytiquement, la force qui assure l'équilibre de O [une telle force est quelquefois appelée un équilibrant].

87. Montrer que sur le cercle $z = Re^{i\theta}$, $|e^{iz}| = e^{-R \sin \theta}$.

88. (a) Montrer que $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$ avec

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta_3 = \operatorname{Arctg} \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right)$$

(b) Généraliser le résultat de (a).

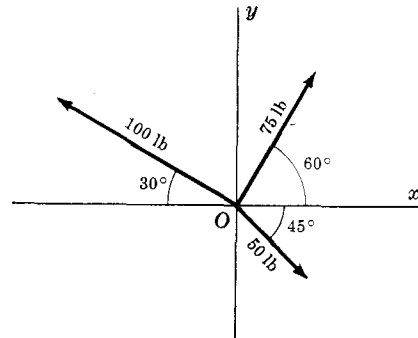


Fig. 1-41

FORMULE DE DE MOIVRE

89. Evaluer chacune des expressions suivantes.

$$(a) (5 \operatorname{cis} 20^\circ)(3 \operatorname{cis} 40^\circ) \quad (c) \frac{(8 \operatorname{cis} 40^\circ)^3}{(2 \operatorname{cis} 60^\circ)^4} \quad (d) \frac{(3e^{\pi i/6})(2e^{-5\pi i/4})(6e^{5\pi i/3})}{(4e^{2\pi i/3})^2} \quad (e) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$$

$$\text{Rép. : (a) } 15/2 + (15\sqrt{3}/2)i, \text{ (b) } 32 - 32\sqrt{3}i, \text{ (c) } -16 - 16\sqrt{3}i, \text{ (d) } 3\sqrt{3}/2 - (3\sqrt{3}/2)i, \text{ (e) } -\sqrt{3}/2 - (1/2)i$$

90. Démontrer que (a) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$, (b) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.91. Montrer que les solutions de $z^4 - 3z^2 + 1 = 0$ sont $z = 2 \cos 36^\circ, 2 \cos 72^\circ, 2 \cos 216^\circ, 2 \cos 252^\circ$.92. Montrer que (a) $\cos 36^\circ = (\sqrt{5} + 1)/4$, (b) $\cos 72^\circ = (\sqrt{5} - 1)/4$. [Indication : utiliser le problème 91].

93. Montrer que (a) $\frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 \theta - 4 = 2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta - 4$
 (b) $\cos 4\theta = 8 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1$

94. Démontrer la formule de De Moivre (a) pour les entiers négatifs, (b) pour les nombres rationnels.

RACINES DES NOMBRES COMPLEXES

95. Déterminer et représenter graphiquement chacune des racines indiquées.

$$(a) (2\sqrt{3} - 2i)^{1/2}, \text{ (b) } (-4 + 4i)^{1/5}, \text{ (c) } (2 + 2\sqrt{3}i)^{1/3}, \text{ (d) } (-16i)^{1/4}, \text{ (e) } (64)^{1/6}, \text{ (f) } (i)^{2/3}.$$

$$\text{Rép. : (a) } 2 \operatorname{cis} 165^\circ, 2 \operatorname{cis} 345^\circ. \text{ (b) } \sqrt{2} \operatorname{cis} 27^\circ, \sqrt{2} \operatorname{cis} 99^\circ, \sqrt{2} \operatorname{cis} 171^\circ, \sqrt{2} \operatorname{cis} 243^\circ, \sqrt{2} \operatorname{cis} 315^\circ. \\ \text{(c) } \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 20^\circ, \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 140^\circ, \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 260^\circ. \text{ (d) } 2 \operatorname{cis} 67.5^\circ, 2 \operatorname{cis} 157.5^\circ, 2 \operatorname{cis} 247.5^\circ, 2 \operatorname{cis} 337.5^\circ. \\ \text{(e) } 2 \operatorname{cis} 0^\circ, 2 \operatorname{cis} 60^\circ, 2 \operatorname{cis} 120^\circ, 2 \operatorname{cis} 180^\circ, 2 \operatorname{cis} 240^\circ, 2 \operatorname{cis} 300^\circ. \text{ (f) } \operatorname{cis} 60^\circ, \operatorname{cis} 180^\circ, \operatorname{cis} 300^\circ.$$

96. Trouver et représenter dans le plan complexe chacune des racines indiquées.

$$(a) \text{ racines cubiques de } 8, \text{ (b) racines carrées de } 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i, \text{ (c) racines cinquièmes de } -16 + 16\sqrt{3}i, \\ \text{(d) racines sixièmes de } -27i.$$

$$\text{Rép. (a) } 2 \operatorname{cis} 0^\circ, 2 \operatorname{cis} 120^\circ, 2 \operatorname{cis} 240^\circ. \text{ (b) } \sqrt{8} \operatorname{cis} 22.5^\circ, \sqrt{8} \operatorname{cis} 202.5^\circ. \text{ (c) } 2 \operatorname{cis} 48^\circ, 2 \operatorname{cis} 120^\circ, 2 \operatorname{cis} 192^\circ, \\ 2 \operatorname{cis} 264^\circ, 2 \operatorname{cis} 336^\circ. \text{ (d) } \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 45^\circ, \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 105^\circ, \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 165^\circ, \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 225^\circ, \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 285^\circ, \sqrt[6]{3} \operatorname{cis} 345^\circ.$$

97. Résoudre les équations (a) $z^4 + 81 = 0$, (b) $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$.

$$\text{Rép. : (a) } 3 \operatorname{cis} 45^\circ, 3 \operatorname{cis} 135^\circ, 3 \operatorname{cis} 225^\circ, 3 \operatorname{cis} 315^\circ \\ \text{(b) } \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 40^\circ, \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 100^\circ, \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 160^\circ, \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 220^\circ, \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 280^\circ, \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} 340^\circ$$

98. Déterminer les racines carrées de (a) $5 - 12i$, (b) $8 + 4\sqrt{5}i$.

$$\text{Rép. : (a) } 3 - 2i, -3 + 2i. \text{ (b) } \sqrt{10} + \sqrt{2}i, -\sqrt{10} - \sqrt{2}i$$

99. Déterminer les racines cubiques de $-11 - 2i$. Rép. : $1 + 2i, \frac{1}{2} - \sqrt{3} + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})i, -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)i$

EQUATIONS ALGEBRIQUES

100. Déterminer toutes les racines des équations suivantes : (a) $5z^2 + 2z + 10 = 0$, (b) $z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$.

$$\text{Rép. : (a) } (-1 \pm 7i)/5, \text{ (b) } 1 + i, 1 - 2i$$

101. Résoudre $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$. Rép. $1, 1, 2, -1 \pm i$ 102. (a) Déterminer toutes les racines de $z^4 + z^2 + 1 = 0$ et (b) représenter ces racines dans le plan complexe.

$$\text{Rép. : } \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$$

103. Montrer que la somme des produits des racines prises r à r de l'équation

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \text{ est } (-1)^r a_r / a_0 \text{ avec } 0 < r < n.$$

104. Trouver deux nombres dont la somme est 4 et dont le produit est 8. Rép. : $2 + 2i, 2 - 2i$.

LES RACINES N-IESMES DE L'UNITÉ

105. Déterminer (a) les racines quatrièmes de l'unité, (b) les racines septièmes de l'unité ; représenter graphiquement les racines trouvées.

Rép. : (a) $e^{2\pi ik/4} = e^{\pi ik/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$ (b) $e^{2\pi ik/7}$, $k = 0, 1, \dots, 6$

106. (a) Démontrer que $1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \cos 288^\circ = 0$.

(b) Donner une interprétation graphique du résultat de (a).

107. Démontrer que $\cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 108^\circ + \cos 144^\circ = 0$ et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

108. Montrer que la somme des produits des racines prises r à r , est nulle, si $2 \leq r \leq n-1$.

109. Déterminer les racines de $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

Rép. : 0, $(\omega-1)/(\omega+1)$, $(\omega^2-1)/(\omega^2+1)$, $(\omega^3-1)/(\omega^3+1)$, $(\omega^4-1)/(\omega^4+1)$, avec $\omega = e^{2\pi i/5}$

PRODUIT INTERIEUR ET PRODUIT EXTERIEUR

110. Si $z_1 = 2+5i$ et $z_2 = 3-i$, calculer (a) $z_1 \circ z_2$, (b) $z_1 \times z_2$, (c) $z_2 \circ z_1$, (d) $z_2 \times z_1$, (e) $|z_1 \circ z_2|$, (f) $|z_2 \circ z_1|$, (g) $|z_1 \times z_2|$, (h) $|z_2 \times z_1|$.

Rép. : (a) 1, (b) -17, (c) 1, (d) 17, (e) 1, (f) 1, (g) 17, (h) 17

111. Démontrer que (a) $z_1 \circ z_2 = z_2 \circ z_1$, (b) $z_1 \times z_2 = -z_2 \times z_1$.

112. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, démontrer que (a) $z_1 \circ z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$, (b) $z_1 \times z_2 = r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$.

113. Démontrer que (a) $z_1 \circ (z_2 + z_3) = z_1 \circ z_2 + z_1 \circ z_3$, (b) $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$.

114. Déterminer l'aire du triangle de sommets $-4-i$, $1+2i$, $4-3i$. Rép. : 17.

115. Déterminer l'aire du quadrilatère de sommets $(2, -1)$, $(4, 3)$, $(-1, 2)$ et $(-3, -2)$. Rép. : 18

COORDONNEES CONJUGUEES

116. Déterminer l'équation cartésienne des courbes suivantes dont l'équation en coordonnées conjuguées $z, \bar{z}$ est :

(a) $z\bar{z} = 16$, (b) $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 8 = 0$, (c) $z + \bar{z} = 4$, (d) $\bar{z} = z + 6i$.

Rép. (a) $x^2 + y^2 = 16$, (b) $x^2 + y^2 - 4x + 8 = 0$, (c) $x = 2$, (d) $y = -3$

117. Ecrire chacune des équations suivantes en coordonnées conjuguées.

(a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$, (b) $2x - 3y = 5$, (c) $4x^2 + 16y^2 = 25$.

Rép. (a) $(z-3)(\bar{z}-3) = 9$, (b) $(2i-3)z + (2i+3)\bar{z} = 10i$, (c) $3(z^2 + \bar{z}^2) - 10z\bar{z} + 25 = 0$

ENSEMBLES DE POINTS

118. Soit S l'ensemble des points $a + bi$, où a et b sont rationnels, situés à l'intérieur du carré ombré de la figure 1-42.

(a) S est-il borné ? (b) Quels sont les points d'accumulation de S s'ils existent ? (c) S est-il fermé ? (d) Quels sont les points intérieurs et les points frontières de S ? (e) S est-il ouvert ? (f) S est-il connexe ? (g) S est-il un ouvert connexe ? (h) Quelle est la fermeture de S ? (i) Quel est le complémentaire de S ? (j) S est-il compact ? (k) S est-il dénombrable ? (l) La fermeture de S est-elle compacte ?

Rép. : (a) Oui, (b) Tout point intérieur au carré ou sur sa frontière est un point d'accumulation. (c) Non. (d) Tous les points du carré sont points frontières. (e) Non. (f) Non. (g) Non. (h) La fermeture de S est l'ensemble de tous les points intérieurs au carré ou situés sur sa frontière. (i) Le complémentaire de S est l'ensemble de tous les points qui ne sont pas de la forme $a + bi$, où a et b sont rationnels [$0 < a < 1$, $0 < b < 1$]. (j) Non. (k) Oui. (l) Oui.

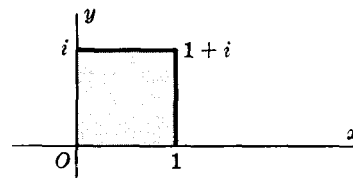


Fig. 1-42

119. Répondre au problème 118 avec S ensemble de tous les points intérieurs au carré.

Rép. : (a) Oui. (b) Tout point intérieur au carré ou sur le carré est point d'accumulation. (c) Non. (d) Tout point situé dans le carré est un point intérieur, tout point du carré est point frontière. (e) Oui. (f) Oui. (g) Oui. (h) La fermeture de S est l'ensemble de tous les points situés dans et sur le carré. (i) Le complémentaire de S est l'ensemble de tous les points extérieurs au carré ou situés sur le carré. (j) Non. (k) Non. (l) Oui.

120. Répondre au problème 118 si S désigne l'ensemble des points qui sont dans et sur le carré.

Rép. : (a) Oui. (b) Chaque point de S est un point d'accumulation. (c) Oui. (d) Chaque point situé dans le carré est un point intérieur, tout point situé sur les côtés du carré est un point frontière. (e) Non. (f) Oui. (g) Non. (h) S lui-même. (i) Tous les points extérieurs au carré. (j) Oui. (k) Non. (l) Oui.

121. Etant donné les ensembles $A = \{1, i, -i\}$, $B = \{2, 1, -i\}$, $C = \{i, -i, 1+i\}$, $D = \{0, -i, 1\}$, déterminer :

(a) $A + (B + C)$ ou $A \cup (B \cup C)$, (b) $AC + BD$ ou $(A \cap C) \cup (B \cap D)$, (c) $(A + C)(B + D)$ ou $(A \cup C) \cap (B \cup D)$.

Rép. : (a) $\{2, 1, -i, i, 1+i\}$, (b) $\{1, i, -i\}$, (c) $\{1, -i\}$

122. Si A, B, C sont des ensembles de points quelconques démontrer que (a) $A + B = B + A$, (b) $AB = BA$, (c) $A + (B + C) = (A + B) + C$, (d) $A(BC)$, (e) $A(B + C) = AB + AC$. Exprimer ces résultats à l'aide des symboles $\cap$ et $\cup$. Expliquer en quoi ceci peut être utilisé pour construire une algèbre d'ensembles.

123. Si A, B, C désignent les ensembles définis par $|z + i| < 3$, $|z| < 5$, $|z + 1| < 4$, représenter graphiquement chacun des ensembles suivants :

(a) $A \cap B \cap C$, (b) $A \cup B \cup C$, (c) $A \cap B \cup C$, (d) $C(A + B)$, (e) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$, (f) $AB + BC + CA$,
(g) $A\tilde{B} + B\tilde{C} + C\tilde{A}$.

124. Démontrer que le complémentaire d'un ensemble S est ouvert ou fermé selon que S est fermé ou ouvert.

125. Si $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des ensembles ouverts, montrer que $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ est ouvert.

126. Si un point d'accumulation d'un ensemble n'appartient pas à cet ensemble, montrer que ce point est nécessairement point frontière de l'ensemble considéré.

PROBLEMES DIVERS

127. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que $(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2$.

128. Expliquer en quoi le calcul suivant est faux : $-1 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, d'où $1 = -1$.

129. (a) Montrer que l'équation $z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0$ où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des constantes réelles non nulles, a une racine imaginaire pure si $a_3^2 + a_1^2 a_4 = a_1 a_2 a_3$.

(b) La réciproque de (a) est-elle vraie ?

130. (a) Montrer que $\cos^n \phi = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos n\phi + n \cos(n-2)\phi + \frac{n(n-1)}{2!} \cos(n-4)\phi + \dots + R_n \right\}$
avec $R_n = \begin{cases} \cos \phi & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{n!}{[(n/2)!]^2} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$

(b) En déduire un résultat semblable pour $\sin^n \phi$.

131. Si $z = 6e^{i\pi/3}$, calculer $|e^{iz}|$. Rép. : $e^{-3\sqrt{3}}$.

132. Montrer que quels que soient les nombres réels p et m , $e^{2mi \operatorname{Arccotg} p} \left\{ \frac{pi + 1}{pi - 1} \right\}^m = 1$

133. Si $P(z)$ désigne un polynôme quelconque à coefficients réels, de la variable z , montrer $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

134. Si z_1, z_2 et z_3 sont colinéaires montrer qu'il existe des constantes réelles non toutes nulles α, β, γ telles que $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

135. Etant donné le nombre complexe z représenter géométriquement (a) $\bar{z}$, (b) $-z$, (c) $1/z$, (d) z^2 .

136. Etant donné deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2 , montrer que l'on peut construire géométriquement à l'aide de la règle et du compas seuls les expressions (a) $z_1 z_2$, (b) z_1/z_2 , (c) $z_1^2 + z_2^2$, (d) $z_1^{1/2}$, (e) $z_2^{3/4}$.

137. Montrer que l'équation d'une droite passant par les points z_1 et z_2 peut être écrite sous la forme

$$\arg \{(z - z_1)/(z_2 - z_1)\} = 0$$

138. Si $z = x + iy$ montrer que $|x| + |y| \leq \sqrt{2} |x + iy|$.

139. La réciproque de la propriété énoncée au problème 51 est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

140. Trouver une équation du cercle passant par les points $1 - i$, $2i$, $1 + i$.

Rép. $|z + 1| = \sqrt{5}$ ou $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

141. Montrer que le lieu des points z tels que $|z - a| |z + a| = a^2$, $a > 0$ est une lemniscate (voir Fig. 1-43).

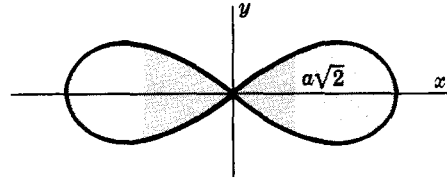


Fig. 1-43

142. Soit $p_n = a_n^2 + b_n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ où a_n et b_n sont des entiers positifs. Montrer que pour tout entier positif M on peut toujours trouver des entiers positifs A et B tels que $p_1 p_2 \dots p_M = A^2 + B^2$.
[Exemple : si $5 = 2^2 + 1^2$ et $25 = 3^2 + 4^2$ alors $5 \cdot 25 = 2^2 + 11^2$.]

143. Montrer que

$$(a) \cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \dots + \cos(\theta + n\alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cos(\theta + \frac{1}{2}n\alpha)$$

$$(b) \sin \theta + \sin(\theta + \alpha) + \dots + \sin(\theta + n\alpha) = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \sin(\theta + \frac{1}{2}n\alpha)$$

144. Démontrer que (a) $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ et (b) $|z - 1| < |z + 1|$ sont des conditions équivalentes.

145. Une roue de 40 cm de rayon [Fig. 1-44] tourne dans le sens trigonométrique direct autour de son axe à raison de 30 tours par minute. (a) Montrer que la position et la vitesse d'un point P de la roue sont données respectivement par $40e^{i\pi t}$ et $40\pi i e^{i\pi t}$, où t est le temps en secondes compté à partir du moment où P est sur l'axe des x dans sa partie positive. (b) Trouver la position et la vitesse de P aux instants $t = 2/3$ et $t = 15/4$.

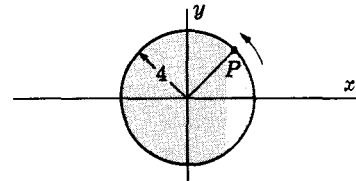


Fig. 1-44

146. Montrer que pour tout entier $n > 1$

$$(z + a)^{2m} - (z - a)^{2m} = 4maz \prod_{k=1}^{m-1} \{z^2 + a^2 \cot^2(k\pi/2m)\}$$

où $\prod_{k=1}^{m-1}$ désigne le produit des facteurs indiqués de $k = 1$ à $k = m - 1$.

147. Si les nombres complexes z_1 et z_2 associés respectivement à P_1 et P_2 sont tels que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, montrer que (a) z_1/z_2 est imaginaire pure, (b) $\widehat{P_1OP_2} = 90^\circ$.

148. Démontrer que pour tout entier $m > 1$

$$\cotg \frac{\pi}{2m} \cotg \frac{2\pi}{2m} \cotg \frac{3\pi}{2m} \dots \cotg \frac{(m-1)\pi}{2m} = 1$$

149. Démontrer et généraliser les égalités suivantes : (a) $\frac{1}{\sin^2 \pi/7} + \frac{1}{\sin^2 2\pi/7} + \frac{1}{\sin^2 4\pi/7} = 2$

$$(b) \operatorname{tg}^2(\pi/16) + \operatorname{tg}^2(3\pi/16) + \operatorname{tg}^2(5\pi/16) + \operatorname{tg}^2(7\pi/16) = 28$$

150. Si les points z_1 , z_2 et z_3 sont affectés des masses m_1 , m_2 et m_3 montrer que le barycentre de ces points est

$$\hat{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Généraliser pour le cas de n masses.

151. Déterminer le point du segment d'extrémités z_1 et z_2 qui partage ce segment dans le rapport p/q .

Rép. $(qz_1 + pz_2)/(q + p)$

152. Démontrer que l'équation du cercle passant par les trois points z_1 , z_2 , z_3 peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) / \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2} \right) / \left(\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} \right)$$

153. Démontrer que les médianes du triangle dont les sommets sont z_1, z_2, z_3 se coupent en le point $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

154. Démontrer que l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 est dénombrable.

[Indication : on écrira cet ensemble sous la forme $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots$]

155. Démontrer que l'ensemble de tous les nombres rationnels est dénombrable.

156. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable.

157. Représenter graphiquement l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles (a) $|z| > |z-1|$, (b) $|z+2| > 1 + |z-2|$.

158. Montrer que (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ et (b) $2 - \sqrt{2}i$ sont des nombres algébriques.

159. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

160. Soit $ABCD \dots PQ$ un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon unité. Montrer que le produit des longueurs des diagonales $AC, AD, \dots, AP$ est $\frac{1}{4} \frac{n}{\sin^2(\pi/n)}$.

161. Montrer que si $\sin \theta \neq 0$,

$$(a) \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \{\cos \theta - \cos(k\pi/n)\}$$

$$(b) \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 k\pi/(2n+1)} \right\}.$$

162. Montrer que $\cos 2n\theta = (-1)^n \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 (2k-1)\pi/4n} \right\}$.

163. Si le produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 est réel et différent de zéro, montrer qu'il existe un nombre réel p tel que $z_1 = p\bar{z}_2$.

164. Si z est un point du cercle $|z-1| = 1$, montrer que $\arg(z-1) = 2 \arg z = \frac{2}{3} \arg(z^2 - z)$ et donner une interprétation géométrique de ces égalités.

165. Montrer que moyennant certaines conditions (a) $z^m z^n = z^{m+n}$, (b) $(z^m)^n = z^{mn}$.

166. Montrer que (a) $\operatorname{Re}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\}$

$$(b) \operatorname{Im}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\}.$$

167. Déterminer l'aire du polygone dont les côtés sont $2+3i, 3+i, -2-4i, -4-i, -1+2i$. Rép. 47/2.

168. On considère les nombres complexes quelconques, $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$. Démontrer l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)$$

CHAPITRE 2

Fonctions, limites et continuité

VARIABLES ET FONCTIONS

Un symbole tel que z qui peut remplacer n'importe quel élément d'un ensemble de nombres complexes est appelé une variable complexe.

Si à chaque valeur que peut prendre une variable complexe z , il correspond une ou plusieurs valeurs d'une variable complexe w , nous dirons que w est une fonction de z et écrirons $w = f(z)$ ou $w = G(z)$, etc. La variable z est quelquefois appelée la variable indépendante cependant que w est appelée la variable dépendante. La valeur de la fonction en $z = a$ est souvent écrite $f(a)$. Ainsi pour $f(z) = z^2$ on a $f(2i) = (2i)^2 = -4$.

FONCTIONS UNIFORMES. FONCTIONS MULTIFORMES

Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z nous dirons que w est une fonction uniforme de z ou que $f(z)$ est uniforme. Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z , nous dirons que w est une fonction multiforme de z .

Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction. On choisit habituellement un des éléments de cet ensemble comme branche principale de la fonction multiforme considérée, la fonction ainsi définie est appelée la détermination principale.

Exemple 1. Si $w = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w . Donc $w = f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z .

Exemple 2. Si l'on considère la fonction $w = z^{1/2}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w . Donc $w = f(z) = z^{1/2}$ est une fonction multiforme de z .

Toutes les fois que nous utiliserons le mot fonction ce sera, sauf spécification contraire, avec le sens de fonction uniforme.

FONCTIONS INVERSES

Si $w = f(z)$, nous pouvons aussi considérer z comme fonction de w , ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est souvent appelée la fonction inverse de f . Ainsi $w = f(z)$ et $w = f^{-1}(z)$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre.

TRANSFORMATIONS

Si $w = u + iv$ (où u et v sont réels) est une fonction uniforme de $z = x + iy$ (où x et y sont réels) nous pouvons écrire $u + iv = f(x + iy)$. En égalant les parties imaginaires et les parties réelles ceci est équivalent à

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (1)$$

Ainsi étant donné un point (x, y) dans le plan de la variable z , tel que P dans la figure 2-1 ci-après, il lui correspond un point (u, v) noté P' , du plan de la variable w (Fig. 2-2). L'ensemble des équations (1) [ou ce qui est équivalent, $w = f(z)$] est appelé une transformation. Nous dirons que le point P est transformé en P' par cette transformation et appellerons P' l'image de P .

Exemple : Si $w = z^2$, alors $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et la transformation est définie par $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. L'image du point $(1, 2)$ du plan de la variable z est le point $(-3, 4)$ du plan de la variable w .

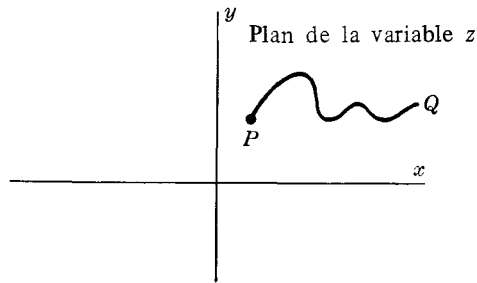


Fig. 2-1

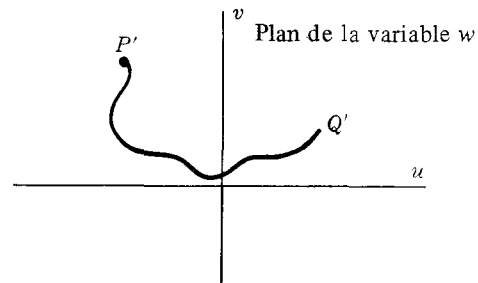


Fig. 2-2

En général un ensemble de points tel que l'arc de courbe PQ de la figure 2-1 est transformé en un ensemble de points, appelé l'image, tel que l'arc $P'Q'$ de la figure 2-2. Les particularités de l'image dépendent naturellement du type de fonction $f(z)$ utilisée. Si $f(z)$ est multiforme, un point (ou une courbe) du plan de la variable z est appliqué en général sur plus d'un point (ou d'une courbe) du plan de la variable w .

COORDONNEES CURVILIGNES

Si l'on se donne la transformation $w = f(z)$ ou ce qui est équivalent, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, nous appellerons (x, y) les coordonnées rectangulaires correspondant au point P du plan de la variable z et (u, v) les coordonnées curvilignes de P .

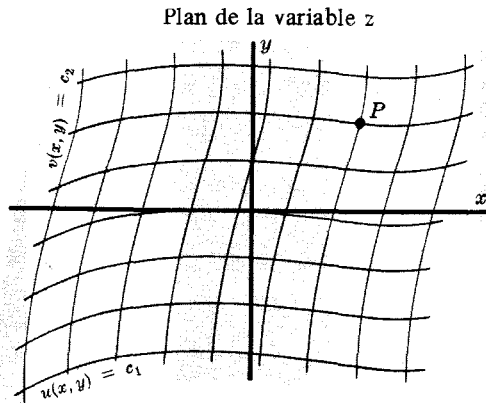


Fig. 2-3

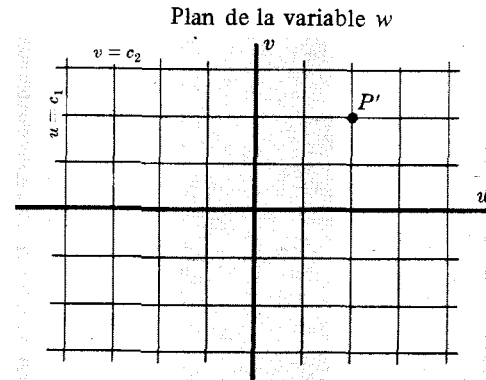


Fig. 2-4

Les courbes $u(x, y) = c_1$, $v(x, y) = c_2$, où c_1 et c_2 sont des constantes sont appelées coordonnées [voir Fig. 2-3], une courbe d'une famille rencontre toujours une courbe de l'autre famille en un point. Dans le plan de la variable w ces courbes sont transformées en une famille de droites formant un réseau orthogonal [voir Fig. 2-4].

LES FONCTIONS ELEMENTAIRES

1. Les fonctions polynômiales sont définies par

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = P(z) \quad (2)$$

où $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ sont des constantes complexes et n un entier positif appelé le degré du polynôme $P(z)$.

La transformation $w = az + b$ est appelée une transformation linéaire.

2. Les fractions rationnelles sont définies par

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3)$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. Nous appellerons quelquefois (3) : une transformation rationnelle. Le cas particulier $w = \frac{az+b}{cz+d}$ où $ad-bc \neq 0$ est appelé transformation homographique.

3. Les fonctions exponentielles sont définies par

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (4)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens : $e = 2,71828$. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a} \quad (5)$$

où $\operatorname{Log} a$ est le logarithme népérien de a . Ceci se ramène à (4) si $a = e$.

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelles. Ainsi par exemple $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$.

4. Fonctions trigonométriques. Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} & \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} & \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 & 1 + \operatorname{tg}^2 z &= \sec^2 z & 1 + \operatorname{cotg}^2 z &= \operatorname{cosec}^2 z \\ \sin(-z) &= -\sin z & \cos(-z) &= \cos z & \operatorname{tg}(-z) &= -\operatorname{tg} z \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \operatorname{tg}(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{tg} z_1 \pm \operatorname{tg} z_2}{1 \mp \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2} \end{aligned}$$

5. Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{coth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{\operatorname{th} z} \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1 & 1 - \operatorname{th}^2 z &= \operatorname{sech}^2 z & \operatorname{coth}^2 z - 1 &= \operatorname{csch}^2 z \\ \operatorname{sh}(-z) &= -\operatorname{sh} z & \operatorname{ch}(-z) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{th}(-z) &= -\operatorname{th} z \\ \operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\ \operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\ \operatorname{th}(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{th} z_1 \pm \operatorname{th} z_2}{1 \pm \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2} \end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \sin iz = i \operatorname{sh} z & \cos iz = \operatorname{ch} z & \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh} iz = i \sin z & \operatorname{ch} iz = \cos z & \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z \end{array}$$

6. **Fonctions logarithmiques.** Si $z = e^w$, nous écrirons $w = \operatorname{Log} z$ appelé le logarithme népérien de z . La fonction $\operatorname{Log} z$ est donc l'inverse de la fonction exponentielle et peut être définie par

$$w = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} z + i(\theta + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$. On remarque que $\operatorname{Log} z$ est une fonction multiforme (cette fonction possède une infinité de déterminations). La détermination principale ou valeur principale de $\operatorname{Log} z$ est souvent définie par $\operatorname{Log} r + i\theta$ où $0 \leq \theta < 2\pi$. Cependant tout autre intervalle d'amplitude 2π peut être utilisé, par exemple $-\pi \leq \theta < +\pi$ etc.

La fonction logarithme peut être définie pour d'autres bases réelles que e . Ainsi pour $z = a^w$ on a $w = \operatorname{Log}_a z$ avec $a > 0$ et $a \neq 0, 1$. Dans ce cas $z = e^{w \operatorname{Log} a}$ et donc $w = \operatorname{Log} z / \operatorname{Log} a$.

7. **Fonctions trigonométriques inverses.** Si $z = \sin w$ alors $w = \operatorname{arcsin} z$ est appelée la fonction inverse de $\sin z$ ou arc sinus de z . De la même façon on peut définir d'autres fonctions trigonométriques inverses $\operatorname{arccos} z$, $\operatorname{arctg} z$, etc. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme. Dans les formules qui suivent nous avons omis la constante $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, du logarithme.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (iz + \sqrt{1 - z^2}) & \operatorname{arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) & \operatorname{arcotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{z + i}{z - i} \right) \end{array}$$

8. **Fonctions hyperboliques inverses.** Si $z = \operatorname{sh} w$ alors $w = \operatorname{argsh} z$ est la fonction inverse du sinus hyperbolique de z . De la même façon nous pouvons définir d'autres fonctions inverses des fonctions hyperboliques : $\operatorname{argch} z$, $\operatorname{argth} z$, etc. Ces fonctions qui sont multiformes peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme. Dans les formules qui suivent, nous avons omis la constante $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, du logarithme.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{argsh} z = \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 + 1}) & \operatorname{argch} z = \operatorname{Log} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \operatorname{argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right) & \operatorname{argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right) \end{array}$$

9. **La fonction z^α** , où α peut être complexe, est définie par $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$. De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z , nous pouvons définir $f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log} f(z)}$. En général de telles fonctions sont multiformes.

10. **Fonctions algébriques et transcendentes.** Si w est solution de l'équation algébrique

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \dots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0 \quad (6)$$

où $P_0 \neq 0, P_1(z), \dots, P_n(z)$ sont des polynômes en z et n un entier positif, alors $w = f(z)$ est appelée une fonction algébrique de z .

Exemple : $w = z^{1/2}$ est solution de l'équation $w^2 - z = 0$ et est donc une fonction algébrique de z .

Toute fonction qui ne peut être considérée comme solution de (6) est appelée fonction transcendante. Les fonctions trigonométriques et hyperboliques ainsi que leurs inverses, la fonction logarithme, la fonction exponentielle, sont des exemples de fonctions transcendentes.

Les fonctions considérées dans les paragraphes 1 à 9 ci-dessus ainsi que les fonctions qui en dérivent par un nombre fini d'opérations telles que addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines, sont appelées fonctions élémentaires.

POINTS DE BRANCHEMENT ET COUPURES

Considérons la fonction $w = z^{1/2}$. Supposons que nous fassions décrire à z un contour fermé (parcouru dans le sens direct) autour de l'origine, à partir d'un point A [Fig. 2-5] $z = re^{i\theta}$, $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ si bien que en A , $\theta = \theta_1$ et $w = \sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$. Lorsque l'on revient en A après un tour complet $\theta = \theta_1 + 4\pi$, $w = \sqrt{r}e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$. Nous ne retrouvons donc pas la valeur initiale de w . Cependant si l'on effectue un second tour complet i.e. $\theta = \theta_1 + 4\pi$, $w = \sqrt{r}e^{i(\theta_1+4\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta_1/2}$ et nous obtenons alors la valeur initiale de w .

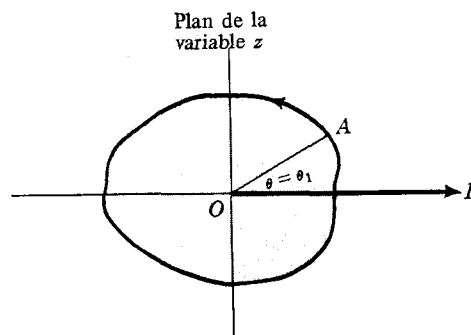


Fig. 2-5

Nous pouvons décrire ce qui précède en posant que si $0 \leq \theta < 2\pi$ nous sommes sur une branche de la fonction multiforme $z^{1/2}$, et si $2\pi \leq \theta < 4\pi$ nous sommes sur l'autre branche.

Il est clair que chaque branche est uniforme. De manière à rendre la fonction uniforme, nous tracerons artificiellement une demi-droite telle que OB , où B est à l'infini [toute autre demi-droite issue de O pourrait être utilisée] et nous conviendrons de ne pas la franchir. Cette droite [tracée en trait plein sur la Fig. 2-5] est appelée une coupure, et O est appelé un point de branchement. On notera que la considération de circuits fermés autour d'autres points que $z = 0$ ne conduit pas à différentes valeurs de la fonction ; $z = 0$ est donc le seul point de branchement à distance finie.

SURFACES DE RIEMANN

Il existe une autre façon d'introduire la coupure décrite ci-dessus. Imaginons, pour cela, que le plan de la variable z est formé de deux feuillets superposés. Coupons les feuillets le long de OB et raccordons le bord inférieur du feuillet le plus bas au bord supérieur du feuillet le plus haut. Alors partant du feuillet inférieur et effectuant un tour complet autour de O nous parviendrons sur le feuillet supérieur. Si nous raccordons maintenant les bords libres nous reviendrons sur le feuillet inférieur, en continuant notre circuit.

L'ensemble des deux feuillets est appelé une surface de Riemann pour la fonction $z^{1/2}$. Chaque feuillet correspond à une détermination de la fonction et sur chaque feuillet la fonction est uniforme.

La notion de surface de Riemann présente l'avantage d'obtenir de façon continue les différentes valeurs d'une fonction multiforme.

On peut étendre aisément ces notions. Ainsi pour la fonction $z^{1/3}$ la surface de Riemann correspondante aura 3 feuillets ; pour $\text{Log } z$ la surface de Riemann aura une infinité de feuillets.

LIMITES

Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage de $z = z_0$ sauf peut-être en $z = z_0$ (c'est-à-dire définie dans un δ voisinage pointé de z_0). Nous dirons que le nombre complexe l est

la limite de $f(z)$ quand z tend vers z_0 et écrivons $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ si pour tout nombre positif ϵ (arbitrairement petit) nous pouvons déterminer un nombre positif δ (dépendant d'habitude de ϵ) tel que $|f(z) - l| < \epsilon$ dès que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Dans de telles circonstances nous dirons également que $f(z)$ tend vers l quand z tend vers z_0 et écrivons $f(z) \rightarrow l$ quand $z \rightarrow z_0$. La limite est indépendante de la manière dont z tend vers z_0 .

Géométriquement ceci signifie que z_0 étant un point du plan complexe, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ si la valeur absolue de la différence entre $f(z)$ et l peut être rendue aussi petite que nous le désirons en choisissant z suffisamment près de z_0 (en excluant $z = z_0$).

Exemple : Soit $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$. Alors quand z tend vers i , $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$. Nous

pouvons conjecturer que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -1$. Pour le prouver, nous devons voir dans quelle mesure la définition précédente est satisfaite. Pour cette démonstration voir le problème 23.

On remarquera que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$, i.e. la limite de $f(z)$ quand $z \rightarrow i$ n'est pas la même que la valeur de $f(z)$ en $z = i$, car $f(i) = 0$ par définition. La limite serait -1 même si $f(z)$ n'était pas définie en $z = i$.

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique, i.e. c'est la seule (voir le problème 26). Si $f(z)$ est multiforme la limite de $f(z)$ quand $z \rightarrow z_0$ peut dépendre de la branche choisie.

THEOREMES SUR LES LIMITES

Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, alors

$$1. \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) + g(z)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A + B$$

$$2. \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) - g(z)\} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A - B$$

$$3. \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) g(z)\} = \left\{ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right\} \left\{ \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right\} = AB$$

$$4. \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{A}{B} \text{ si } B \neq 0$$

POINT A L'INFINI

Par la transformation $w = 1/z$, le point $z = 0$ (i.e. l'origine) est transformé en $w = \infty$ appelé point à l'infini du plan de la variable w . De la même façon nous noterons par $z = \infty$ le point à l'infini du plan de la variable z . Pour étudier le comportement de $f(z)$ à $z = \infty$, il suffira de poser $z = 1/w$ et d'étudier le comportement de $f(1/w)$ à $w = 0$.

Nous dirons que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l$ ou que $f(z)$ tend vers l quand z tend vers l'infini, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $M > 0$ tel que $|f(z) - l| < \epsilon$ pourvu que $|z| > M$.

Nous dirons que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ou que $f(z)$ tend vers l'infini quand z tend vers z_0 , si pour tout $N > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|f(z)| > N$ dès que $0 < |z - z_0| < \delta$.

CONTINUITE

Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage de $z = z_0$ et en z_0 (i.e. un δ voisinage de z_0). La fonction $f(z)$ est dite continue en $z = z_0$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Notons que pour que $f(z)$ soit continue en $z = z_0$, les trois conditions suivantes doivent être simultanément remplies.

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ doit exister
2. $f(z_0)$ doit exister, i.e. $f(z)$ est définie en z_0
3. $l = f(z_0)$

De manière équivalente, si $f(z)$ est continue en z_0 ceci peut être traduit de façon suggestive par l'égalité $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f\left(\lim_{z \rightarrow z_0} z\right)$.

Exemple 1 : Si $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$ alors d'après l'exemple de la page 38, $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -1$. Mais $f(i) = 0$.
Donc $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$.

Exemple 2 : Si $f(z) = z^2$ pour tout z , alors $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = f(i) = -1$ et $f(z)$ est continue en $z = i$.

Les points du plan de la variable z où $f(z)$ n'est pas continue sont appelés discontinuités de $f(z)$, et $f(z)$ est dite discontinue en ces points. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe mais n'est pas égale à $f(z_0)$ on peut rendre la fonction continue en changeant la valeur $f(z_0)$ et en attribuant à $f(z)$ pour $z = z_0$ la valeur $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

On peut exprimer la continuité d'une fonction d'une manière différente de celle vue ci-dessus ; $f(z)$ sera dite continue en $z = z_0$ si à tout $\epsilon > 0$ on peut associer $\delta > 0$ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ pour $|z - z_0| < \delta$. On notera que ce n'est pas autre chose que la définition de la limite avec $l = f(z_0)$ et sans la restriction $z \neq z_0$.

CONTINUITE DANS UNE REGION

Une fonction $f(z)$ est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.

THEOREMES SUR LA CONTINUITE

Théorème 1. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont continues en $z = z_0$, les fonctions $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$, $f(z)g(z)$ et $\frac{f(z)}{g(z)}$ le sont également, la dernière seulement si $g(z) \neq 0$. Des résultats semblables sont valables pour une région.

Théorème 2. Parmi les fonctions continues dans tout domaine fini du plan complexe on peut citer (a) tous les polynômes, (b) e^z , (c) $\sin z$ et $\cos z$.

Théorème 3. Si $w = f(z)$ est continue en $z = z_0$ et si $z = g(\xi)$ est continue en $\xi = \xi_0$ avec $\xi_0 = f(z_0)$, alors la fonction $w = g[f(z)]$, appelée fonction de fonction ou fonction composée, est continue en $z = z_0$. D'une façon plus condensée ceci s'exprime parfois sous la forme suivante : Une fonction continue d'une fonction continue est continue.

Théorème 4. Si $f(z)$ est continue dans un domaine fermé, elle y est bornée ; i.e. il existe une constante M telle que $|f(z)| < M$ pour tous les points z de ce domaine.

Théorème 5. Si $f(z)$ est continue dans un domaine alors la partie réelle de $f(z)$ et sa partie imaginaire y sont également continues.

CONTINUITE UNIFORME

Soit $f(z)$ une fonction continue dans un ouvert connexe. Alors par définition et pour tout point z_0 de l'ensemble de définition, quel que soit $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver $\delta > 0$ (qui dépend en général à la fois de ϵ et du point particulier z_0) tel que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ si $|z - z_0| < \delta$. Si nous pouvons trouver δ ne dépendant que de ϵ et non du point particulier z_0 , nous dirons que $f(z)$ est uniformément continue dans ce domaine.

On peut dire également que $f(z)$ est uniformément continue dans un ouvert connexe si pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ dès que $|z_1 - z_2| < \delta$, z_1 et z_2 étant deux points quelconques de l'ouvert considéré.

SUITES

Une fonction d'une variable entière positive, désignée par $f(n)$ ou u_n , où $n = 1, 2, 3, \dots$, est appelée une suite. Une suite est donc un ensemble de nombres rangés dans un ordre donné et obtenus selon une loi bien définie. Chaque nombre de la suite est appelé un terme et u_n est appelé le $n^{\text{ième}}$ terme. La suite $u_1, u_2, u_3, \dots$ est par abréviation désignée par $\{u_n\}$. La suite est dite finie ou infinie, selon qu'elle comporte un nombre fini de termes ou non. Sauf autre spécification nous ne considérerons que des suites infinies.

Exemple 1 : L'ensemble des nombres $i, i^2, i^3, \dots, i^{100}$ est une suite finie. Le terme de rang n est donné par $u_n = i^n$, $n = 1, 2, \dots, 100$.

Exemple 2 : L'ensemble des nombres $1 + i, \frac{(1+i)^2}{2!}, \frac{(1+i)^3}{3!}, \dots$ est une suite infinie ; le terme de rang n est donné par $u_n = (1+i)^n/n!$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

LIMITE D'UNE SUITE

Un nombre l est appelé limite d'une suite infinie $u_1, u_2, u_3, \dots$ si pour tout nombre positif ϵ nous pouvons trouver un nombre positif N dépendant de ϵ tel que $|u_n - l| < \epsilon$ pour tout $n > N$. Dans un tel cas nous écrivons $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$. Si la limite d'une suite existe, la suite est dite convergente, dans le cas contraire elle est dite divergente. Une suite ne peut converger que vers une seule limite, i.e. si une limite existe elle est unique.

Une façon plus intuitive mais moins rigoureuse d'exprimer cette notion de limite consiste à dire qu'une suite $u_1, u_2, u_3, \dots$ admet une limite l si les termes successifs se "rapprochent de plus en plus" de l . Ceci est souvent utilisé pour avoir une idée de la valeur de la limite, ensuite on applique la définition pour vérifier si la conjecture est correcte.

THEOREMES SUR LES LIMITES DE SUITES

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, alors

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = AB$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad \text{si } B \neq 0$$

Des compléments sur les suites seront donnés ultérieurement au Chapitre 6.

SERIES INFINIES

Soit $u_1, u_2, u_3, \dots$, une suite donnée.

Formons une nouvelle suite $S_1, S_2, S_3, \dots$ définie par

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

où S_n , appelée la $n^{\text{ième}}$ somme partielle, est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n\}$.

La suite $S_1, S_2, S_3, \dots$ est représentée par

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

qui est appelée une série infinie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ existe, la série est dite convergente et S est sa somme ; sinon la série est dite divergente. Une condition nécessaire pour que la série converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; cette condition n'est pas suffisante (voir les problèmes 40 et 150).

D'autres éléments sur les séries infinies seront donnés au Chapitre 6.

Problèmes résolus

FONCTIONS ET TRANSFORMATIONS

1. Soit $w = f(z) = z^2$. Trouver les valeurs de w qui correspondent à (a) $z = -2 + i$ et à (b) $z = 1 - 3i$; montrer de quelle façon la correspondance peut être représentée graphiquement.

(a) $w = f(-2 + i) = (-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$

(b) $w = f(1 - 3i) = (1 - 3i)^2 = 1 - 6i + 9i^2 = -8 - 6i$

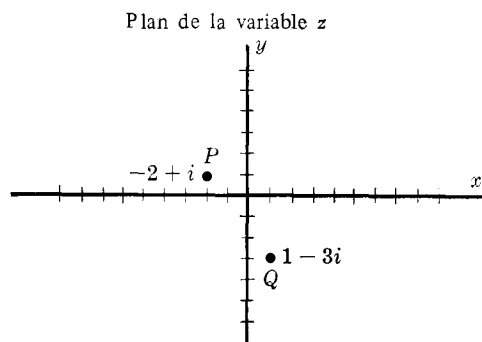


Fig. 2-6

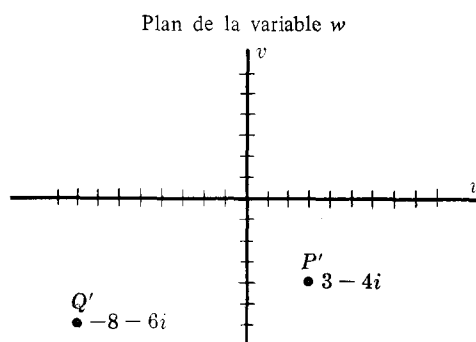


Fig. 2-7

Le point $z = -2 + i$ représenté par P dans le plan de la variable z , figure 2-6, a pour image le point $w = 3 - 4i$ représenté par P' dans le plan de la variable w , figure 2-7. Nous dirons que P est transformé en P' au moyen de la fonction, ou de la transformation $w = z^2$. De la même manière, $z = 1 - 3i$ [point Q de la figure 2-6] est transformé en $w = -8 - 6i$ [point Q' de la Fig. 2-7]. A chaque point du plan des z correspond un point et un seul (image) du plan des w ; w est donc une fonction uniforme de z .

2. Montrer que la droite joignant les points P et Q du problème 1 est transformée par $w = z^2$ en une courbe passant par P' et Q' dont on déterminera l'équation

Les points P et Q ont pour coordonnées $(-2, 1)$ et $(1, -3)$. Les équations paramétriques de la droite passant par ces points sont

$$\frac{x - (-2)}{1 - (-2)} = \frac{y - 1}{-3 - 1} = t \quad \text{ou} \quad x = 3t - 2, \quad y = 1 - 4t$$

L'équation de la droite PQ peut être mise sous la forme $z = 3t - 2 + i(1 - 4t)$. La courbe transformée de la droite a pour équation

$$\begin{aligned} w = z^2 &= \{3t - 2 + i(1 - 4t)\}^2 = (3t - 2)^2 - (1 - 4t)^2 + 2(3t - 2)(1 - 4t)i \\ &= 3 - 4t - 7t^2 + (-4 + 22t - 24t^2)i \end{aligned}$$

En tenant compte de $w = u + iv$, les équations paramétriques de la courbe image sont

$$u = 3 - 4t - 7t^2, \quad v = -4 + 22t - 24t^2$$

On obtient la représentation graphique de cette courbe en faisant varier t .

3. Un point P se déplace dans le sens direct sur le cercle du plan de la variable z , centré à l'origine et de rayon 1. Montrer que si P est transformé en P' au moyen de la transformation $w = z^3$, quand P parcourt une fois dans le sens direct le cercle considéré, son image P' fait trois tours complets dans le sens direct sur le cercle du plan de la variable w centré à l'origine et de rayon 1.

On pose $z = re^{i\theta}$. Alors sur le cercle $|z| = 1$ [Fig. 2-8], $r = 1$ et $z = e^{i\theta}$. D'où $w = z^3 = (e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$. Si (ρ, ϕ) désignent les coordonnées polaires dans le plan de la variable w , nous avons $w = \rho e^{i\phi} = e^{3i\theta}$ et donc $\rho = 1$, $\phi = 3\theta$.

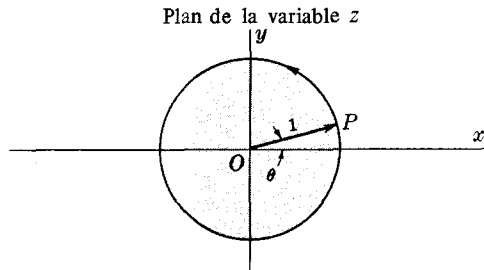


Fig. 2-8

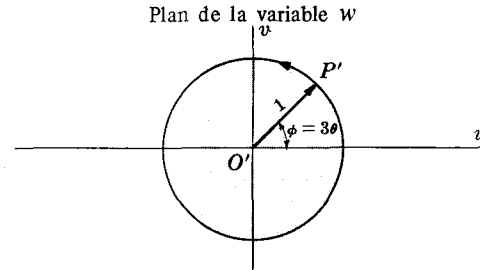


Fig. 2-9

De $\rho = 1$ on déduit que l'image P' se déplace sur un cercle du plan de la variable w , de rayon 1 et de centre l'origine [Fig. 2-9]. De plus quand P se déplace dans le sens direct d'un angle θ , P' se déplace dans le sens direct d'un angle 3θ . Donc quand P fera un tour complet, P' fera trois tours complets. En termes de vecteurs cela signifie que le vecteur $O'P'$ tourne trois fois plus vite que le vecteur OP .

4. Si c_1 et c_2 sont des constantes réelles quelconques, déterminer les ensembles de points du plan de la variable z qui sont transformés en les droites (a) $u = c_1$, (b) $v = c_2$ du plan de la variable w , au moyen de la transformation $w = z^2$. Représenter graphiquement les cas particuliers $c_1 = 2, 4, -2, -4$ et $c_2 = 2, 4, -2, -4$.

Nous avons $w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, si bien que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Les droites $u = c_1$ et $v = c_2$ du plan de la variable w correspondent donc respectivement aux hyperboles $x^2 - y^2 = c_1$ et $2xy = c_2$, du plan de la variable z ainsi que le représentent les figures 2-10 et 2-11.

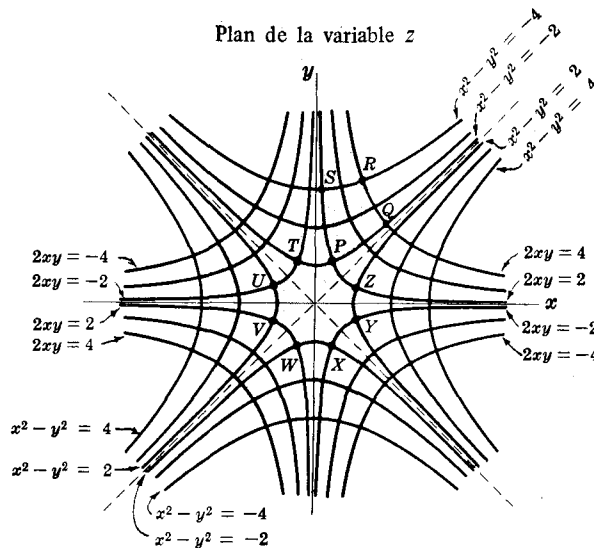


Fig. 2-10

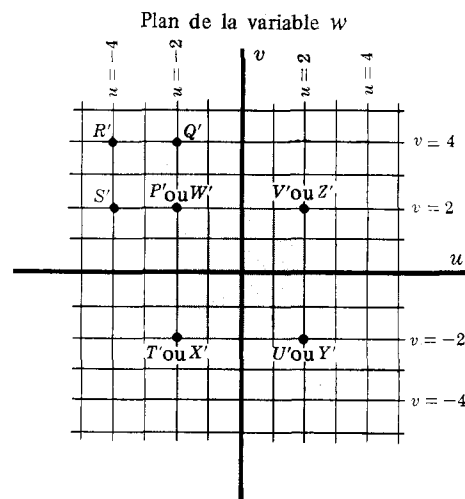


Fig. 2-11

5. En se reportant au problème 4, déterminer (a) l'image de la région du premier quadrant délimitée par $x^2 - y^2 = -2$, $xy = 1$, $x^2 - y^2 = -4$ et $xy = 2$; (b) l'image de la région du plan de la variable z délimitée par toutes les branches de $x^2 - y^2 = 2$, $xy = 1$, $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = -1$; (c) les coordonnées curvilignes du point du plan des xy dont les coordonnées rectangulaires sont $(2, -1)$.

- (a) La région du plan de la variable z est indiquée par la partie ombrée $PQRS$ de la figure 2-10. Cette région a pour image la partie ombrée imposée $P'Q'R'S'$ de la figure 2-11. On notera que la courbe $PQRSP$ est décrite dans le sens direct ainsi que son image $P'Q'R'S'P'$.
- (b) La région considérée du plan de la variable z est indiquée par la partie ombrée $PTUVWXYZ$ de la figure 2-10. Cette région a pour image le carré $P'T'U'V'$, ombré dans la figure 2-11.

Il est intéressant de remarquer que la frontière de la région $PTUVWXYZ$ est décrite une fois seulement alors que la frontière de la région image $P'T'U'V'$ l'est deux fois. Ceci est dû au fait que les huit points P et W , T et X , U et Y , V et Z du plan de la variable z sont transformés en les quatre points P' ou W' , T' ou X' , U' ou Y' , V' ou Z' , respectivement.

Cependant quand la frontière de la région $PQRS$ est parcourue une fois, la frontière de la région image est aussi parcourue une fois. La différence est due au fait qu'en décrivant la courbe $PTUVWXYZP$ nous n'entourons pas l'origine.

- (c) $u = x^2 - y^2 = (2)^2 - (-1)^2 = 3$, $v = 2xy = 2(2)(-1) = -4$. Les coordonnées curvilignes sont donc $u = 3$, $v = -4$.

FONCTIONS MULTIFORMES

6. Soit $w^5 = z$ et supposons que pour la valeur particulière $z = z_1$ nous ayons $w = w_1$. (a) Si partant du point z_1 dans le plan de la variable z [voir Fig. 2-12] on décrit dans le sens direct un contour fermé entourant l'origine, montrer que la valeur de w après retour en z_1 est $w_1 e^{2\pi i/5}$. (b) Quelles sont les valeurs de w en z_1 après 2, 3, ... tours complets autour de l'origine ? (c) Traiter (a) et (b) si le contour n'entoure pas l'origine.

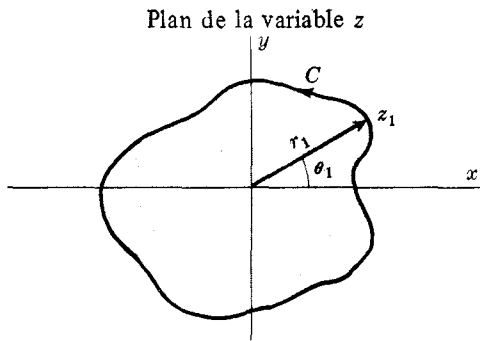


Fig. 2-12

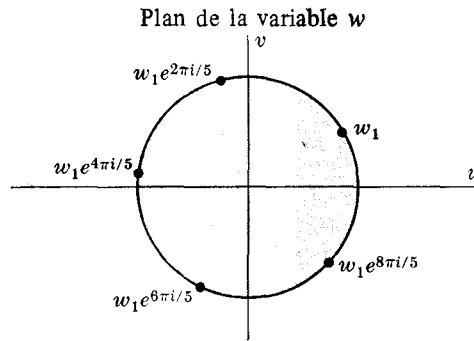


Fig. 2-13

- (a) On pose $z = re^{i\theta}$ d'où $w = z^{1/5} = r^{1/5} e^{i\theta/5}$. Si $r = r_1$ et $\theta = \theta_1$ alors $w_1 = r_1^{1/5} e^{i\theta_1/5}$.

Si θ croît de θ_1 à $\theta_1 + 2\pi$, ce qui arrive au cours d'un tour complet dans le sens direct autour de l'origine, on trouve

$$w = r_1^{1/5} e^{i(\theta_1 + 2\pi)/5} = r_1^{1/5} e^{i\theta_1/5} e^{2\pi i/5} = w_1 e^{2\pi i/5}$$

- (b) Après deux tours complets autour de l'origine on trouve

$$w = r_1^{1/5} e^{i(\theta_1 + 4\pi)/5} = r_1^{1/5} e^{i\theta_1/5} e^{4\pi i/5} = w_1 e^{4\pi i/5}$$

De la même façon après 3 et 4 tours complets autour de l'origine

$$w = w_1 e^{6\pi i/5} \quad \text{et} \quad w = w_1 e^{8\pi i/5}$$

Après 5 tours complets la valeur de w est $w_1 e^{10\pi i/5} = w_1$, si bien que l'on ne retrouve la valeur initiale qu'après avoir décrit 5 fois le contour considéré. Ensuite le cycle se répète [voir Fig. 2-13].

Autre méthode. De $w^5 = z$, nous tirons $\arg z = 5 \arg w$ d'où l'on déduit

$$(\text{Variation de } \arg w) = \frac{1}{5} (\text{Variation } \arg z)$$

D'où si l'argument de z augmente de $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, \dots$, l'argument de w augmente de $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5, 2\pi, \dots$ ce qui conduit aux résultats déjà obtenus en (a) et (b).

- (c) Si le contour considéré n'entoure pas l'origine l'accroissement de $\arg z$ est nul, et il en est de même pour l'accroissement de $\arg w$. Dans ce cas la valeur de w est w_1 quel que soit le nombre de tours effectués.

7. (a) Dans le problème précédent expliquer pourquoi on peut considérer w comme un ensemble de cinq fonctions uniformes.
 (b) Expliquer géométriquement les relations entre ces fonctions uniformes.
 (c) Montrer géométriquement comment on peut ne considérer qu'une seule de ces fonctions uniformes.

- (a) De $w^5 = z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$ où k est un entier nous tirons

$$w = r^{1/5} e^{i(\theta + 2k\pi)/5} = r^{1/5} \{ \cos (\theta + 2k\pi)/5 + i \sin (\theta + 2k\pi)/5 \}$$

et donc w est une fonction multiforme de z pouvant prendre les cinq valeurs données par $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

De façon équivalente nous pouvons considérer w comme un ensemble de cinq fonctions uniformes appelées branches de la fonction multiforme considérée, en restreignant les variations de θ . Ainsi nous pouvons écrire

$$w = r^{1/5} (\cos \theta/5 + i \sin \theta/5)$$

où nous prenons pour θ les cinq intervalles possibles $0 \leq \theta < 2\pi$, $2\pi \leq \theta < 4\pi$, ..., $8\pi \leq \theta < 10\pi$, tous les autres intervalles conduisant aux mêmes résultats.

Le premier intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$ correspond à la détermination principale de la fonction multiforme considérée.

D'autres intervalles de longueur 2π peuvent également être utilisés, ainsi $-\pi \leq \theta < \pi$, $\pi \leq \theta < 3\pi$, etc.,

- (b) Si l'on considère la branche principale

$$w = r^{1/5} (\cos \theta/5 + i \sin \theta/5) \quad \text{où} \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Après un tour complet autour de l'origine dans le plan de la variable z , θ augmente de 2π et donne une autre branche de la fonction. Après un autre tour complet autour de l'origine une autre branche est obtenue, et ainsi de suite jusqu'à ce que les cinq branches ayant été trouvées nous retournions à la détermination principale.

Les différentes valeurs de $f(z)$ étant obtenues en tournant autour de $z = 0$, le point $z = 0$ est appelé un point de branchement.

- (c) Nous pouvons ne considérer qu'une seule de ces fonctions uniformes, habituellement la branche principale, en imposant que pas plus d'un tour complet autour de l'origine ne puisse être effectué, i.e. en restreignant convenablement les variations de θ .

Dans le cas de la détermination principale ceci est obtenu en construisant une coupure notée OA dans la figure 2-14 ci-dessous, et portée par la partie positive de l'axe réel ; nous nous imposerons de ne pas traverser cette coupure (quand on traverse la coupure on obtient une autre branche de la fonction).

Si nous choisissons pour la variable θ un autre intervalle de variation que $0 \leq \theta < 2\pi$, on choisira comme coupure une autre demi-droite du plan de la variable z , issue du point de branchement.

Dans des applications qui seront vues plus loin il sera utile de considérer des contours tels que celui qui est indiqué figure 2-15 ou figure 2-14 qui en est un cas limite.

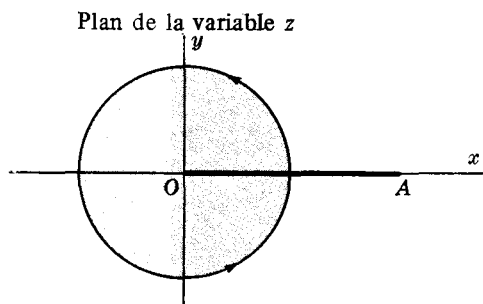


Fig. 2-14

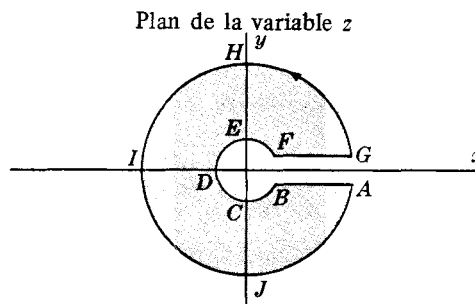


Fig. 2-15

LES FONCTIONS ELEMENTAIRES

8. Montrer que (a) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, (b) $|e^z| = e^x$, (c) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(a) Par définition $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ où $z = x + iy$. Donc si $z_1 = x_1 + iy_1$ et si $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned}
 e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\
 &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\
 &= e^{x_1+x_2} \{ \cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2) \} = e^{z_1+z_2}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad |e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$(c) \text{ D'après (a), } e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$$

Ceci montre que la fonction e^z admet la période $2k\pi i$. En particulier elle a la période $2\pi i$.

9. Démontrer que

$$(a) \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (c) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$(b) e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (d) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\text{Par définition, } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad \text{Donc}$$

$$\begin{aligned}
 (a) \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\
 &= - \left(\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} \right) + \left(\frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} \right) = 1
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad (1) \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z, \quad (2) \quad e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$

$$\text{Par addition de (1) et (2) : } 2e^{iz} = 2 \cos z + 2i \sin z \quad \text{et} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$\text{En soustrayant (1) de (2) : } 2e^{-iz} = 2 \cos z - 2i \sin z \quad \text{et} \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$\begin{aligned}
 (c) \sin(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{2i} \\
 &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2i} \\
 &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \cos(z_1 + z_2) &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{2} \\
 &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) + (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2} \\
 &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2
 \end{aligned}$$

10. Montrer que les zéros de (a) $\sin z$ et (b) $\cos z$ sont tous réels, déterminer leurs valeurs.

$$(a) \text{ Si } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0, \text{ alors } e^{iz} = e^{-iz} \text{ ou } e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{D'où } 2iz = 2k\pi i \quad \text{et} \quad z = k\pi, \text{ i.e. } z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ sont les zéros recherchés.}$$

$$(b) \text{ Si } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0, \text{ alors } e^{iz} = -e^{-iz} \text{ et } e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{D'où } 2iz = (2k+1)\pi i \quad \text{et} \quad z = (k + \frac{1}{2})\pi, \text{ i.e. } z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots \text{ sont les zéros recherchés.}$$

11. Démontrer que (a) $\sin(-z) = -\sin z$, (b) $\cos(-z) = \cos z$, (c) $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$.

$$(a) \sin(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = -\sin z$$

$$(b) \cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(c) \operatorname{tg}(-z) = \frac{\sin(-z)}{\cos(-z)} = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\operatorname{tg} z, \text{ à l'aide de (a) et (b).}$$

Les fonctions de z telles que $f(-z) = -f(z)$ sont appelées fonctions impaires cependant que celles pour lesquelles $f(-z) = f(z)$ sont appelées fonctions paires. Ainsi $\sin z$ et $\operatorname{tg} z$ sont des fonctions impaires cependant que $\cos z$ est une fonction paire.

12. Montrer que : (a) $1 - \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$ (c) $\cos iz = \operatorname{ch} z$
 (b) $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ (d) $\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

(a) Par définition, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. D'où

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1$$

Divisant par $\operatorname{ch}^2 z$, $\frac{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$ ou $1 - \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$

(b) $\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = i \operatorname{sh} z$

(c) $\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$

(d) D'après le problème 9(c) et les parties (b) et (c) nous avons

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

13. (a) Si $z = e^w$ avec $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $w = u + iv$, montrer que $u = \operatorname{Log} r$ et $v = \theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ si bien que $w = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i(\theta + 2k\pi)$. (b) Déterminer les valeurs de $\operatorname{Log}(1-i)$. Quelle est la détermination principale ?

(a) De $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$, on tire en égalant les parties réelles et imaginaires,

$$(1) \quad e^u \cos v = r \cos \theta \quad (2) \quad e^u \sin v = r \sin \theta$$

En élevant au carré (1) et (2) nous obtenons par addition $e^{2u} = r^2$ ou $e^u = r$ et $u = \operatorname{Log} r$. Alors de (1) et (2) on tire $r \cos v = r \cos \theta$, $r \sin v = r \sin \theta$ d'où $v = \theta + 2k\pi$. On a donc $w = u + iv = \operatorname{Log} r + i(\theta + 2k\pi)$.

Si $z = e^w$ on a $w = \operatorname{Log} z$. Nous voyons donc que $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i(\theta + 2k\pi)$. Une autre façon d'écrire la même chose est $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta$ où θ peut prendre une infinité de valeurs qui diffèrent les unes des autres d'un multiple de 2π .

Notons que formellement $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(re^{i\theta}) = \operatorname{Log} r + i\theta$ en utilisant les règles habituelles du calcul logarithmique des mathématiques élémentaires.

(b) De $1-i = \sqrt{2} e^{7\pi i/4 + 2k\pi i}$, on tire $\operatorname{Log}(1-i) = \operatorname{Log} \sqrt{2} + \left(\frac{7\pi i}{4} + 2k\pi i \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2 + \frac{7\pi i}{4} + 2k\pi i$.

La détermination principale est $\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2 + \frac{7\pi i}{4}$ obtenue en donnant à k la valeur 0.

14. Montrer que la fonction $f(z) = \operatorname{Log} z$ a un point de branchement en $z = 0$.

On a $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta$. Supposons que l'on parte du point $z_1 \neq 0$ du plan complexe avec $r = r_1$, $\theta = \theta_1$, on a donc $\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} r_1 + i\theta_1$ [voir figure 2-16]. Alors après un tour complet autour de l'origine dans le sens direct, on trouve en revenant en z_1 $r = r_1$, $\theta = \theta_1 + 2\pi$ si bien que $\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} r_1 + i(\theta_1 + 2\pi)$. Nous sommes donc sur une autre branche de la fonction et donc $z = 0$ est un point de branchement.

Des tours supplémentaires autour de l'origine nous conduiront à d'autres branches et (ce qui n'est pas le cas des fonctions telles que $z^{1/2}$ ou $z^{1/5}$) nous ne reviendrons jamais à la branche initiale.

On déduit de là que $\operatorname{Log} z$ est une fonction qui admet une infinité de déterminations. La branche particulière de $\operatorname{Log} z$ qui est réelle quand la variable z est réelle et positive, est appelée la détermination principale. Pour obtenir cette branche principale nous imposerons $\theta = 0$ pour $z > 0$. Ceci peut être fait en prenant $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} r + i\theta$ où θ est choisi de telle manière que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $-\pi \leq \theta < \pi$, etc.

Comme généralisation de ce résultat notons que $\operatorname{Log}(z-a)$ admet $z = a$ pour point de branchement.

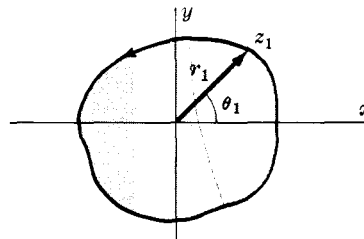


Fig. 2-16

15. On considère la transformation $w = \text{Log } z$. Montrer que (a) les cercles centrés à l'origine dans le plan de la variable z sont transformés en droites parallèles à l'axe des v dans le plan de la variable w , (b) les droites ou les rayons issus de l'origine dans le plan de la variable z sont transformés en droites parallèles à l'axe des u dans le plan de la variable w , (c) le plan de la variable z est transformé en une bande de largeur 2π dans le plan de la variable w . Illustrer ces résultats graphiquement.

Nous avons $w = u + iv = \text{Log } z = \text{Log } r + i\theta$ et donc $u = \text{Log } r, v = \theta$.

Choisissons la détermination principale de telle manière que $w = \text{Log } r + i\theta$ où $0 \leq \theta < 2\pi$.

- (a) Les cercles centrés à l'origine et ayant pour rayon a , ont pour équation $|z| = r = a$. Ils sont transformés en les droites du plan de la variable w d'équations $u = \text{Log } a$. Dans les figures 2-17 et 2-18 les cercles et les droites correspondantes sont représentés pour les valeurs $a = 1/2, 1, 3/2, 2$.

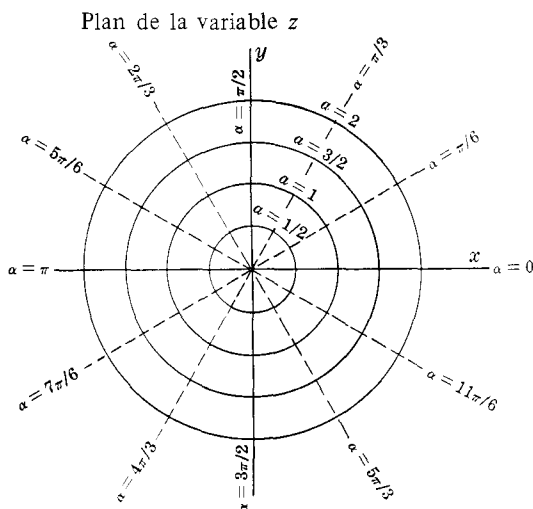


Fig. 2-17

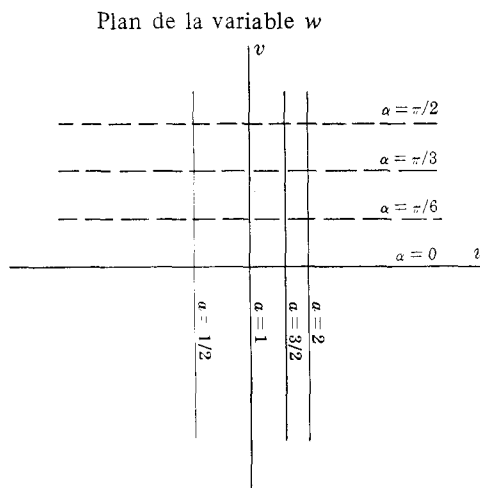


Fig. 2-18

- (b) Les droites ou rayons issus de l'origine dans le plan de la variable z (en pointillé dans la figure 2-17) ont pour équation $\theta = \alpha$. Ces droites sont transformées en les droites du plan de la variable w ayant pour équation $v = \alpha$ (en pointillé dans la figure 2-18). Nous avons indiqué les courbes qui correspondent à $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3$ et $\pi/2$.
- (c) A tout point P donné du plan de la variable z , défini par $z \neq 0$ et ayant pour coordonnées polaires (r, θ) avec $0 \leq \theta < 2\pi, r > 0$, on peut faire correspondre un point P' de la bande de largeur 2π ombrée dans la figure 2-20. Le plan de la variable z est donc transformé en cette bande. Le point $z = 0$ est transformé en un point de la bande appelé quelquefois point à l'infini.

Si θ est tel que $2\pi \leq \theta < 4\pi$ le plan des z est transformé en la bande $2\pi \leq v < 4\pi$ de la figure 2-20. De la même façon nous pouvons obtenir les autres bandes de la figure 2-10.

On déduit de là qu'à tout point $z \neq 0$ du plan de la variable z il correspond une infinité de points images dans le plan de la variable w .

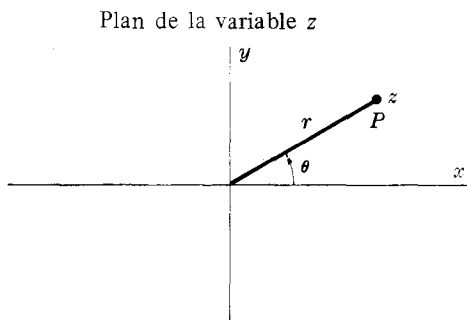


Fig. 2-19

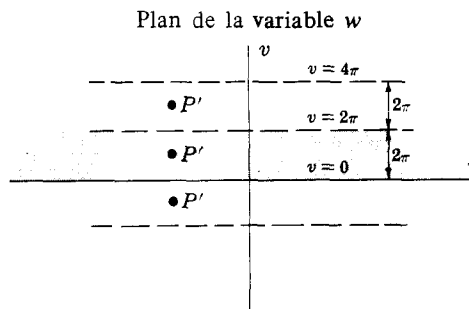


Fig. 2-20

On remarquera que si θ avait été choisi tel que $-\pi \leq \theta < \pi, \pi \leq \theta < 3\pi$, etc, les bandes de la figure 2-20 auraient été traduites vers le haut d'une distance π .

16. Si nous appelons détermination principale de $\arcsin z$ celle qui vérifie $\arcsin 0 = 0$, démontrer que

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

Si $w = \arcsin z$, alors $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$ d'où

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

On trouve en résolvant $e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2} = iz + \sqrt{1-z^2}$

où $\sqrt{1-z^2}$ tient lieu de $\pm \sqrt{1-z^2}$. D'autre part $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1-z^2} \quad \text{ou} \quad w = 2k\pi + \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

La branche pour laquelle $w = 0$ pour $z = 0$ est obtenue en donnant à k la valeur 0, et l'on trouve comme il est demandé

$$w = \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

17. Si nous appelons détermination principale de $\operatorname{argth} z$ celle pour laquelle $\operatorname{argth} 0 = 0$, démontrer que

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

Si $w = \operatorname{argth} z$ alors $z = \operatorname{th} w = \frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$ d'où

$$(1-z)e^w = (1+z)e^{-w} \quad \text{ou} \quad e^{2w} = (1+z)/(1-z)$$

De $e^{2w} = e^{2(w-k\pi i)}$, on tire

$$e^{2(w-k\pi i)} = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{ou} \quad w = k\pi i + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

La branche principale est obtenue pour $k = 0$, ce qui conduit au résultat demandé.

18. (a) Si $z = re^{i\theta}$, montrer que $z^i = e^{-(\theta+2k\pi)} \{\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)\}$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(b) Si z est un point du cercle unité centré à l'origine, montrer que z^i représente une infinité de nombres réels et préciser la valeur principale de z^i .

(c) Trouver la valeur principale de i^i .

(a) Par définition $z^i = e^{i \operatorname{Log} z} = e^{i \{\operatorname{Log} r + i(\theta + 2k\pi)\}}$
 $= e^{i \operatorname{Log} r - (\theta + 2k\pi)} = e^{-(\theta + 2k\pi)} \{\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)\}$

La branche principale de la fonction multiforme $f(z) = z^i$ est obtenue pour $k = 0$ et est donnée par $e^{-\theta} \{\cos(\operatorname{Log} r) + i \sin(\operatorname{Log} r)\}$ où nous pouvons choisir θ tel que $0 \leq \theta < 2\pi$.

(b) Si z est un point quelconque du cercle unité centré à l'origine, alors $|z| = r = 1$. D'où d'après (a) comme $\operatorname{Log} r = 0$, on a $z^i = e^{-(\theta + 2k\pi)}$ qui représente une infinité de nombres réels. La détermination principale est $e^{-\theta}$ où θ est choisi tel que $0 \leq \theta < 2\pi$.

(c) Par définition, $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i \{i(\pi/2 + 2k\pi)\}} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi)}$ car $i = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$ et $\operatorname{Log} i = i(\pi/2 + 2k\pi)$.

La valeur principale est $e^{-\pi/2}$.

Autre méthode. D'après (b), puisque $z = i$ est un point du cercle unité centré à l'origine, pour lequel $\theta = \pi/2$, la valeur principale est $e^{-\pi/2}$.

POINTS DE BRANCHEMENT, COUPURES, SURFACES DE RIEMANN

19. On considère la fonction $w = f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$. (a) Montrer que $z = \pm i$ sont les points de branchement de $f(z)$. (b) Montrer qu'un tour complet autour des deux points de branchement à la fois, n'entraîne pas de changement de branche de $f(z)$.

(a) Nous avons $w = (z^2 + 1)^{1/2} = \{(z-i)(z+i)\}^{1/2}$, d'où $\arg w = \frac{1}{2} \arg(z-i) + \frac{1}{2} \arg(z+i)$ et donc

$$(\text{variation de } \arg w) = \frac{1}{2} \{\text{variation de } \arg(z-i)\} + \frac{1}{2} \{\text{variation de } \arg(z+i)\}$$

Soit C [Fig. 2-21] un contour fermé entourant le point i mais non le point $-i$. Quand z parcourt une fois C dans le sens direct

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & \text{variation de } \arg(z - i) = 2\pi, & \text{variation de } \arg(z + i) = 0 \\ & \text{variation de } \arg w = \pi \end{aligned}$$

Donc w ne reprend pas sa valeur initiale, i.e. il y a eu changement de branche. Du fait qu'un tour complet autour du point $z = i$ change les branches de la fonction, on déduit que $z = i$ est un point de branchement. De la même façon en utilisant une courbe fermée C entourant $-i$, on peut montrer que $z = -i$ est un point de branchement.

Autre méthode.

Soit $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$. D'où

$$w = \{r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}\}^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}$$

Supposons que l'on parte avec la valeur particulière de z correspondant à $\theta_1 = \alpha_1$ et $\theta_2 = \alpha_2$. Quand z décrit un tour dans le sens direct autour de i , θ_1 croît jusqu'à $\alpha_1 + 2\pi$ pendant que θ_2 reste le même, i.e. $\theta_2 = \alpha_2$. D'où

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\alpha_1 + 2\pi)/2} e^{i\alpha_2/2} \\ &= -\sqrt{r_1 r_2} e^{i\alpha_1/2} e^{i\alpha_2/2} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on ne retrouve pas la valeur initiale de w , i.e. un changement de branche est survenu, montrant par là que $z = i$ est un point de branchement.

- (b) Si C entoure à la fois les deux points de branchement $z = \pm i$ comme dans la figure 2-22, alors quand z décrit une fois C dans le sens direct

$$\begin{aligned} \text{variation de } \arg(z - i) &= 2\pi \\ \text{variation de } \arg(z + i) &= 2\pi \end{aligned}$$

et donc $\text{variation de } \arg w = 2\pi$

Un tour complet autour des deux points de branchement ne produit donc aucun changement de branche.

Autre méthode.

Dans ce cas, se référant à la deuxième méthode de la partie (a), θ_1 croît de α_1 à $\alpha_1 + 2\pi$ pendant que θ_2 croît de α_2 à $\alpha_2 + 2\pi$. Donc

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\alpha_1 + 2\pi)/2} e^{i(\alpha_2 + 2\pi)/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\alpha_1/2} e^{i\alpha_2/2}$$

et il n'y a pas de changement de branche.

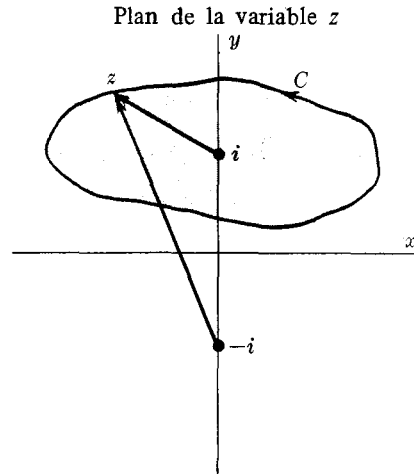


Fig. 2-21

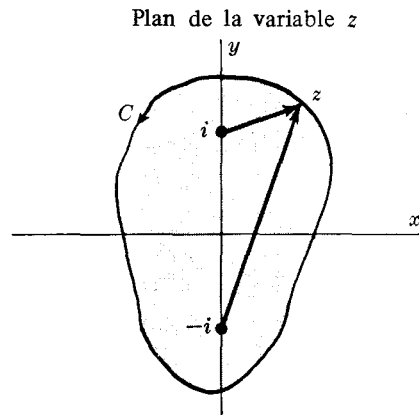


Fig. 2-22

20. Déterminer des coupures rendant uniforme la fonction du problème 19.

On peut choisir une des coupures indiquées en trait plein dans les figures 2-23, 2-24. Dans chacun de ces cas si l'on ne traverse pas ces traits on est assuré de l'uniformité de la fonction.

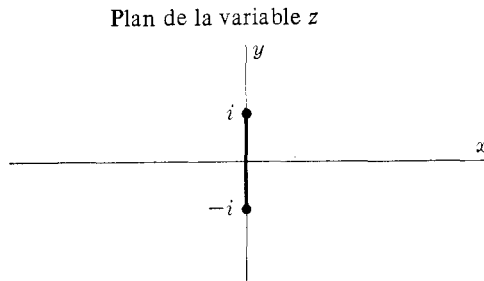


Fig. 2-23

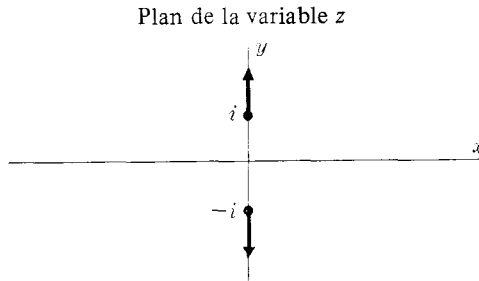


Fig. 2-24

21. Décrire la surface de Riemann correspondant à la fonction du problème 19.

Nous pouvons avoir différentes surfaces de Riemann correspondant aux figures 2-23, 2-24 du problème 20. Dans le cas de la figure 2-23 par exemple on peut imaginer que le plan de la variable z est formé de deux feuillets superposés coupés le long du segment $-i, +i$. Les bords opposés de la coupure sont alors joints, formant la surface de Riemann. En effectuant un tour complet autour de $z = i$ on passe d'une branche sur l'autre. Cependant si l'on tourne à la fois autour de $z = i$ et de $z = -i$ on ne change pas de branche. Ceci est conforme aux résultats du problème 19.

22. Décrire la surface de Riemann correspondant à la fonction $f(z) = \text{Log } z$ [voir problème 14].

Dans ce cas nous pouvons imaginer le plan de la variable z comme formé d'une infinité de feuillets superposés et coupés le long d'une droite issue de l'origine $z = 0$. On raccorde alors un bord de la coupure d'un feuillet au bord opposé de la coupure d'un feuillet adjacent. Ainsi à chaque fois que l'on fait un tour de l'origine, on se retrouve sur un autre feuillet correspondant à une branche différente de la fonction. L'en-semble de ces feuillets est la surface de Riemann. Dans ce cas, contrairement à ce qui s'est passé dans les problèmes 6 et 7, des circuits successifs ne nous ramènent jamais à la branche initiale.

LIMITES

23. (a) Si $f(z) = z^2$, montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$.

(b) Déterminer $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ si $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$.

(a) On doit montrer que $\epsilon > 0$ étant donné on peut trouver δ (dépendant en général de ϵ) tel que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ pourvu que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Si $\delta \leq 1$, alors $0 < |z - z_0| < \delta$ implique que

$$|z^2 - z_0^2| = |z - z_0| |z + z_0| < \delta |z - z_0 + 2z_0| < \delta \{|z - z_0| + |2z_0|\} < \delta(1 + 2|z_0|)$$

Choissant δ comme étant le plus petit de 1, ou $\epsilon/(1 + 2|z_0|)$, nous avons alors $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ dès que $|z - z_0| < \delta$, ce qui établit le résultat demandé.

(b) Il n'y a pas de différence entre ce problème et celui de la partie (a) car dans chacun des cas $z = z_0$ est exclu des raisonnements. Donc $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$. On notera que la limite de $f(z)$ quand $z \rightarrow z_0$ n'a rien à voir avec la valeur de $f(z)$ en z_0 .

24. Interpréter géométriquement le problème 23.

(a) L'équation $w = f(z) = z^2$ définit une transformation des points du plan de la variable z en points du plan de la variable w . On supposera en particulier que z_0 est transformé en $w_0 = z_0^2$.

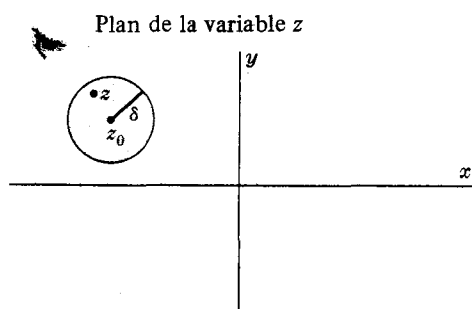


Fig. 2-25

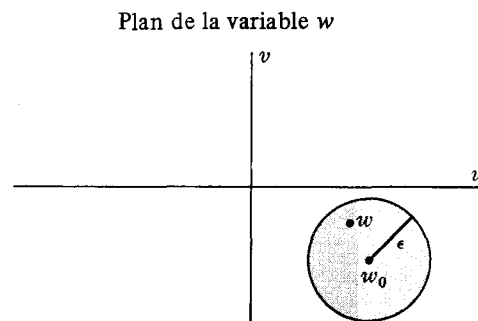


Fig. 2-26

Dans le problème 23 (a) nous avons montré que pour tout $\epsilon > 0$ donné, nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que $|w - w_0| < \epsilon$ pourvu que $|z - z_0| < \delta$. Géométriquement cela signifie que si nous désirons que w soit à l'intérieur d'un cercle de rayon ϵ [voir Fig. 2-26] nous devons choisir δ (dépendant de ϵ) de telle manière que z soit à l'intérieur d'un cercle de rayon δ . D'après le problème 23 (a) ceci est certainement réalisé si δ est le plus petit des deux nombres 1 et $\epsilon/(1 + 2|z_0|)$.

(b) Dans le problème 23 (a), $w = w_0 = z_0^2$ est l'image de $z = z_0$. Cependant dans le problème 23 (b), $w = 0$ est l'image de $z = z_0$. Cela mis à part, l'interprétation géométrique est la même que dans la partie (a).

25. Démontrer que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$.

On doit montrer que pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i) \right| < \epsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |z - i| < \delta$$

Puisque $z \neq i$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} &= \frac{[3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i][z - i]}{z - i} \\ &= 3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i \end{aligned}$$

en simplifiant par le facteur commun $(z - i) \neq 0$

On doit donc montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z - 4 + i| < \epsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |z - i| < \delta$$

Si $\delta \leq 1$, alors $0 < |z - i| < \delta$ entraîne

$$\begin{aligned} |3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z - 4 + i| &= |z - i| |3z^2 + (6i - 2)z - 1 - 4i| \\ &= |z - i| |3(z - i + i)^2 + (6i - 2)(z - i + i) - 1 - 4i| \\ &= |z - i| |3(z - i)^2 + (12i - 2)(z - i) - 10 - 6i| \\ &< \delta \{ 3|z - i|^2 + |12i - 2||z - i| + |-10 - 6i| \} \\ &< \delta(3 + 13 + 12) = 28\delta \end{aligned}$$

En prenant pour δ le plus petit des deux nombres 1 et $\epsilon/28$ on trouve le résultat demandé.

THEOREMES SUR LES LIMITES

26. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, montrer qu'elle est unique.

On doit montrer que si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_1$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_2$, alors $l_1 = l_2$.

Par hypothèse quel que soit $\epsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |f(z) - l_1| &< \epsilon/2 \quad \text{quand} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ |f(z) - l_2| &< \epsilon/2 \quad \text{quand} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \end{aligned}$$

D'où

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2| \leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

i.e. $|l_1 - l_2|$ est plus petit que tout nombre positif ϵ (arbitrairement petit) et doit donc être nul. Donc $l_1 = l_2$.

27. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \neq 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|B| \quad \text{pour} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, on peut trouver δ tel que $|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B|$ pour $0 < |z - z_0| < \delta$.

En écrivant $B = B - g(z) + g(z)$, nous avons

$$|B| \leq |B - g(z)| + |g(z)| < \frac{1}{2}|B| + |g(z)|$$

$$\text{i.e.} \quad |B| < \frac{1}{2}|B| + |g(z)| \quad \text{d'où l'on tire} \quad |g(z)| > \frac{1}{2}|B|$$

28. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, montrer que (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = A + B$,

$$(b) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB, \quad (c) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B} \quad \text{si} \quad B \neq 0, \quad (d) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad \text{si} \quad B \neq 0.$$

(a) Nous devons montrer que pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \epsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Nous avons

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| = |[f(z) - A] + [g(z) - B]| \leq |f(z) - A| + |g(z) - B| \quad (1)$$

Par hypothèse, étant donné $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que

$$|f(z) - A| < \epsilon/2 \quad \text{quand} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad (2)$$

$$|g(z) - B| < \epsilon/2 \quad \text{quand} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2 \quad (3)$$

Alors de (1), (2) et (3)

$$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{quand } 0 < |z - z_0| < \delta$$

où δ est choisi comme étant le plus petit de δ_1 et δ_2 .

$$\begin{aligned} (b) \text{ Nous avons } |f(z)g(z) - AB| &= |f(z)\{g(z) - B\} + B\{f(z) - A\}| \\ &\leq |f(z)| |g(z) - B| + |B| |f(z) - A| \\ &\leq |f(z)| |g(z) - B| + (|B| + 1) |f(z) - A| \end{aligned} \quad (4)$$

Puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, nous pouvons trouver δ_1 tel que $|f(z) - A| < 1$ pour $0 < |z - z_0| < \delta_1$.

Alors d'après les inégalités 4, page 2,

$$|f(z) - A| \geq |f(z)| - |A|, \quad \text{i.e. } 1 \geq |f(z) - A| \quad \text{ou} \quad |f(z)| \leq |A| + 1$$

i.e. $|f(z)| < P$ où P est une constante positive.

Puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, étant donné $\epsilon > 0$, on peut déterminer $\delta_2 > 0$ tel que $|g(z) - B| < \epsilon/2P$ pour $0 < |z - z_0| < \delta_2$.

Puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, étant donné $\epsilon > 0$, on peut déterminer $\delta_3 > 0$ tel que $|f(z) - A| < \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)}$ pour $0 < |z - z_0| < \delta_3$.

Dans ces conditions (4) devient

$$|f(z)g(z) - AB| < P \cdot \frac{\epsilon}{2P} + (|B| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|B| + 1)} = \epsilon$$

pour $0 < |z - z_0| < \delta$ où δ est le plus petit des trois nombres $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ce qui achève la démonstration.

(c) On doit montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(z) - B|}{|B| |g(z)|} < \epsilon \quad \text{quand } 0 < |z - z_0| < \delta \quad (5)$$

Par hypothèse étant donné $\epsilon > 0$ on peut déterminer $\delta_1 > 0$ tel que

$$|g(z) - B| < \frac{1}{2} |B|^2 \epsilon \quad \text{quand } 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

D'après le problème 27, puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \neq 0$, nous pouvons déterminer δ_2 tel que

$$|g(z)| > \frac{1}{2} |B| \quad \text{quand } 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

D'où si δ représente le plus petit des deux nombres δ_1 et δ_2 , nous pouvons écrire

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(z) - B|}{|B| |g(z)|} < \frac{\frac{1}{2} |B|^2 \epsilon}{|B| \cdot \frac{1}{2} |B|} = \epsilon \quad \text{dès que } 0 < |z - z_0| < \delta$$

ce qui démontre le résultat demandé.

(d) D'après les parties (b) et (c)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ f(z) \cdot \frac{1}{g(z)} \right\} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

Ceci peut être démontré directement [voir problème 145]

Note. Dans la preuve de (a) nous avons utilisé les résultats $|f(z) - A| < \epsilon/2$ et $|g(z) - B| < \epsilon/2$, si bien que le résultat final découle de $|f(z) + g(z) - (A + B)| < \epsilon$. Naturellement la démonstration serait aussi valable si au lieu de ϵ nous avions utilisé 2ϵ [ou tout autre multiple positif de ϵ]. Des remarques analogues sont valables pour les démonstrations de (b), (c) et (d).

29. Calculer les expressions suivantes à l'aide des théorèmes sur les limites.

$$\begin{aligned} (a) \lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 5z + 10) &= \lim_{z \rightarrow 1+i} z^2 + \lim_{z \rightarrow 1+i} (-5z) + \lim_{z \rightarrow 1+i} 10 \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow 1+i} z \right) \left(\lim_{z \rightarrow 1+i} z \right) + \left(\lim_{z \rightarrow 1+i} -5 \right) \left(\lim_{z \rightarrow 1+i} z \right) + \lim_{z \rightarrow 1+i} 10 \\ &= (1+i)(1+i) - 5(1+i) + 10 = 5 - 3i \end{aligned}$$

Dans la pratique on omet les étapes intermédiaires.

$$(b) \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim_{z \rightarrow -2i} (2z+3) \lim_{z \rightarrow -2i} (z-1)}{\lim_{z \rightarrow -2i} (z^2-2z+4)} = \frac{(3-4i)(-2i-1)}{4i} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$$

Dans ce cas le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0, les théorèmes sur les limites ne s'appliquent donc pas.

Toutefois par décomposition en facteurs des polynômes nous voyons que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} &= \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{(z+2)(z-2e^{\pi i/3})(z-2e^{5\pi i/3})}{(z-2e^{\pi i/3})(z-2e^{2\pi i/3})(z-2e^{4\pi i/3})(z-2e^{5\pi i/3})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{(z+2)}{(z-2e^{2\pi i/3})(z-2e^{4\pi i/3})} = \frac{e^{\pi i/3} + 1}{2(e^{\pi i/3} - e^{2\pi i/3})(e^{\pi i/3} - e^{4\pi i/3})} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i \end{aligned}$$

Autre méthode. Puisque $z^6 - 64 = (z^2 - 4)(z^4 - 4z^2 + 16)$, le problème se ramène à la recherche de :

$$\lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{(z^2 - 4)(z^3 + 8)}{z^6 - 64} = \lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^2 - 4}{z^3 - 8} = \frac{e^{2\pi i/3} - 1}{2(e^{\pi i} - 1)} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$$

30. Démontrer que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des x , alors $y = 0$ et $z = x + iy = x$, $\bar{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Si $z \rightarrow 0$ le long de l'axe des y , alors $x = 0$ et $z = x + iy = iy$, $\bar{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \rightarrow 0$, il n'y a pas de limite.

CONTINUITE

31. (a) Montrer que $f(z) = z^2$ est continue en $z = z_0$.

(b) Montrer que $f(z) = \begin{cases} z^2 & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$, où $z_0 \neq 0$, est discontinue en $z = z_0$.

(a) D'après le problème 23 (a), $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = z_0^2$ et donc $f(z)$ est continue en $z = z_0$.

Autre méthode. On doit montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ (dépendant de ϵ) tel que $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| < \epsilon$ quand $|z - z_0| < \delta$; on se reportera ensuite au problème 23 (a).

(b) D'après le problème 23 (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0^2$, mais $f(z_0) = 0$. Donc $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq f(z_0)$ et la fonction $f(z)$ est discontinue en $z = z_0$ si $z_0 \neq 0$.

Si $z_0 = 0$, alors $f(z) = 0$; et puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 = f(0)$, on voit que la fonction est continue.

32. La fonction $f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ est-elle continue en $z = i$?

$f(i)$ n'existe pas, i.e. $f(z)$ n'est pas définie en $z = i$. Donc $f(z)$ ne peut être continue en $z = i$.

En complétant la définition de $f(z)$ par $f(i) = \lim_{z \rightarrow i} f(z) = 4 + 4i$ (voir problème 25) nous rendons la fonction continue en $z = i$.

33. Démontrer que si $f(z)$ et $g(z)$ sont continues en $z = z_0$, il en est de même pour

$$(a) f(z) + g(z), \quad (b) f(z)g(z), \quad (c) \frac{f(z)}{g(z)} \text{ si } g(z_0) \neq 0$$

Ces résultats proviennent du problème 28 où l'on pose $A = f(z_0)$, $B = g(z_0)$ et où l'on remplace $0 < |z - z_0| < \delta$ par $|z - z_0| < \delta$, i.e. en incluant la valeur $z = z_0$.

34. Démontrer que $f(z) = z^2$ est continue dans le disque $|z| \leq 1$.

Soit z_0 un point quelconque du disque $|z| \leq 1$. D'après le problème 23 (a), $f(z)$ est continue en z_0 , donc $f(z)$ est continue dans le disque car continue en tout point du disque.

35. Pour quelles valeurs de z les fonctions suivantes sont-elles continues ?

(a) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}$. Le dénominateur étant nul pour $z = \pm i$, la fonction est continue en tout point distinct de $z = \pm i$.

(b) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. D'après le problème 10 (a), $\sin z = 0$ pour $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$. La fonction $f(z)$ est continue en tout point z distinct de $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$.

CONTINUITE UNIFORME

36. Démontrer que $f(z) = z^2$ est uniformément continue dans l'ouvert $|z| < 1$.

Nous devons montrer qu'étant donné $\epsilon > 0$ quelconque, nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$ quand $|z - z_0| < \delta$, où δ ne dépend que de ϵ et non du point particulier z_0 .

Si z et z_0 sont deux points quelconques de l'ouvert $|z| < 1$, alors

$$|z^2 - z_0^2| = |z + z_0| |z - z_0| \leq \{|z| + |z_0|\} |z - z_0| < 2|z - z_0|$$

Donc si $|z - z_0| < \delta$, alors $|z^2 - z_0^2| < 2\delta$. Choisisant $\delta = \epsilon$, nous voyons que $|z^2 - z_0^2| < \epsilon$, quand $|z - z_0| < \delta$, où δ dépend uniquement de ϵ et non de z_0 . La fonction $f(z) = z^2$ est donc uniformément continue dans l'ouvert $|z| < 1$.

37. Montrer que la fonction $f(z) = 1/z$ n'est pas uniformément continue dans l'ouvert $|z| < 1$.

Méthode 1.

Supposons que $f(z)$ est uniformément continue dans ce domaine. Alors quel que soit $\epsilon > 0$ nous pourrions trouver δ , par exemple entre 0 et 1, tel que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ quand $|z - z_0| < \delta$, pour tout z et z_0 dans l'ouvert considéré.

Soit $z = \delta$ et $z_0 = \frac{\delta}{1+\epsilon}$. Alors $|z - z_0| = \left| \delta - \frac{\delta}{1+\epsilon} \right| = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \delta < \delta$.

Cependant $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1+\epsilon}{\delta} \right| = \frac{\epsilon}{\delta} > \epsilon$ (car $0 < \delta < 1$).

Nous aboutissons donc à une contradiction et on en conclut que $f(z) = 1/z$ ne peut être uniformément continue dans l'ouvert considéré.

Méthode 2.

Soient z_0 et $z_0 + \zeta$ deux points quelconques de l'ouvert tels que $|z_0 + \zeta - z_0| = |\zeta| = \delta$. Alors

$$|f(z_0) - f(z_0 + \zeta)| = \left| \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_0 + \zeta} \right| = \frac{|\zeta|}{|z_0| |z_0 + \zeta|} = \frac{\delta}{|z_0| |z_0 + \zeta|}$$

peut être rendu plus grand que tout nombre positif donné, en choisissant z_0 suffisamment près de 0. La fonction considérée ne peut donc être uniformément continue dans le disque ouvert $|z| < 1$.

SUITES ET SERIES

38. Etudier la convergence des suites

(a) $u_n = \frac{i^n}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, (b) $u_n = \frac{(1+i)^n}{n}$.

(a) Les premiers termes de la suite s'écrivent $i, \frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{3}, \frac{i^4}{4}, \frac{i^5}{5}$, etc., ou $i, -\frac{1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \dots$. En plaçant les points correspondants dans le plan de la variable z , nous pouvons conjecturer que la limite est 0. Pour le démontrer nous devons établir que

$$|u_n - l| = |i^n/n - 0| < \epsilon \quad \text{quand} \quad n > N \quad (1)$$

D'autre part $|i^n/n - 0| = |i^n/n| = |i|^n/n = 1/n < \epsilon$ quand $n > 1/\epsilon$

Choisissons $N = 1/\epsilon$. Nous voyons alors que (1) est vrai, la suite converge donc vers zéro.

$$(b) \text{ Considérons } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|^6 = \left| \frac{(1+i)^{n+1}/(n+1)}{(1+i)^n/n} \right| = \frac{n}{n+1} |1+i| = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}.$$

Pour tout $n \geq 10$ (par exemple) nous avons $\frac{n\sqrt{2}}{n+1} > \frac{6}{5} = 1,2$. Donc $|u_{n+1}| > 1,2|u_n|$ pour $n > 10$,

i.e. $|u_{11}| > 1,2|u_{10}|$, $|u_{12}| > 1,2|u_{11}| > (1,2)^2|u_{10}|$, et en général $|u_n| > (1,2)^{n-10}|u_{10}|$. On déduit de là que $|u_n|$ peut être rendu plus grand que tout nombre positif donné à l'avance (si grand qu'il soit) et donc que la limite de $|u_n|$ ne saurait exister ; par conséquent u_n n'a pas de limite. La suite est donc divergente.

39. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Par définition étant donné ϵ nous pouvons déterminer N tel que

$$|a_n - A| < \epsilon/2, \quad |b_n - B| < \epsilon/2 \text{ pour } n > N$$

Donc pour $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \epsilon$$

Ce qui établit le résultat.

On voit que l'on suit la même démarche que dans l'étude des limites de fonctions (problème 28).

40. Démontrer que si la série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ converge, on doit avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Si S_n est la somme des n premiers termes de la série alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. Donc si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe et vaut S , nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$ ou $S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Réciproquement si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ la série peut être convergente ou divergente (voir problème 150).

41. Démontrer que $1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$.

Soit

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$$

Alors

$$zS_n = z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n$$

Par soustraction,

$$(1-z)S_n = 1 - z^n \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{1-z^n}{1-z}$$

Si $|z| < 1$ nous pouvons penser que $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$. Pour l'établir nous devons montrer que si $\epsilon > 0$ est donné, nous pouvons trouver N tel que $|z^n - 0| < \epsilon$ pour tout $n > N$. Le résultat est certainement vrai pour $z = 0$; nous considérerons donc le cas $z \neq 0$.

On sait que $|z^n| = |z|^n < \epsilon$ quand $n \log |z| < \log \epsilon$ ou $n > (\log \epsilon) / (\log |z|) = N$ [car si $|z| < 1$, $\log |z|$ est négatif. Nous avons donc trouvé la valeur cherchée de N et $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

$$\text{Donc} \quad 1 + z + z^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

La série

$$a + az + az^2 + \dots = \frac{a}{1-z}$$

est appelée une série géométrique de premier terme a et de raison z ; sa somme est $a/(1-z)$ pourvu que $|z| < 1$.

PROBLEMES DIVERS

42. Soit $w = (x^2 + 1)^{1/2}$. (a) Si $w = 1$ quand $z = 0$, et si z parcourt la courbe C_1 de la figure 2.27 ci-dessous, trouver la valeur de w pour $z = 1$. (b) Si z décrit la courbe C_2 de la figure 2.28 ci-dessous, la valeur de w pour $z = 1$ est-elle la même que celle trouvée en (a) ?

(a) Les points de branchement de $w = f(z) = (z^2 + 1)^{1/2} = \{(z-i)(z+i)\}^{1/2}$ sont $z = \pm i$ d'après le problème 19.

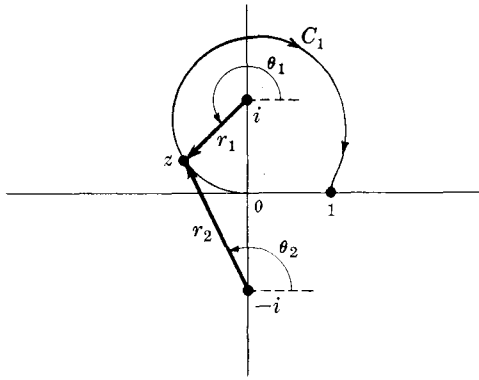


Fig. 2-27

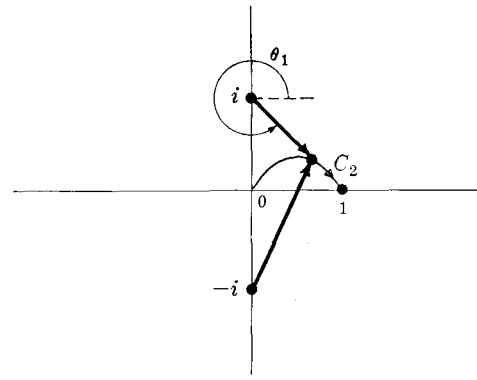


Fig. 2-28

Soit (1) $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$, (2) $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$. Alors puisque θ_1 et θ_2 sont déterminés à un multiple de 2π près, nous pouvons écrire

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} e^{2k\pi i/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} e^{k\pi i} \quad (3)$$

Si l'on se réfère à la figure 2.27 [ou si l'on utilise les équations (1) et (2)] nous voyons que lorsque z est en 0, $r_1 = 1$, $\theta_1 = 3\pi/2$ et $r_2 = 1$, $\theta_2 = \pi/2$. Puisque $w = 1$ en $z = 0$, nous avons d'après (3), $1 = e^{(k+1)\pi i}$ et l'on peut choisir $k = -1$ [ou 1, $-3, \dots$]. Alors

$$w = -\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$$

Quand z décrit C_1 de 0 à 1, r_1 varie de 1 à $\sqrt{2}$, θ_1 de $3\pi/2$ à $-\pi/4$, r_2 varie de 1 à $\sqrt{2}$, θ_2 de $\pi/2$ à $\pi/4$. D'où

$$w = -\sqrt{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} e^{i(-\pi/4 + \pi/4)/2} = -\sqrt{2}$$

(b) De même que dans (a), $w = -\sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$. D'après la figure 2.28 on voit que si z parcourt C_2 , r_1 varie de 1 à $\sqrt{2}$, θ_1 de $3\pi/2$ à $7\pi/4$, r_2 de 1 à $\sqrt{2}$, θ_2 de $\pi/2$ à $\pi/4$. D'où

$$w = -\sqrt{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} e^{i(7\pi/4 + \pi/4)/2} = \sqrt{2}$$

qui n'est pas la même valeur que celle obtenue en (a).

43. Soit $\sqrt{1 - z^2} = 1$ pour $z = 0$. Montrer que lorsque z varie de 0 à $p > 1$ le long de l'axe réel $\sqrt{1 - z^2}$ varie de 1 à $-i\sqrt{p^2 - 1}$.

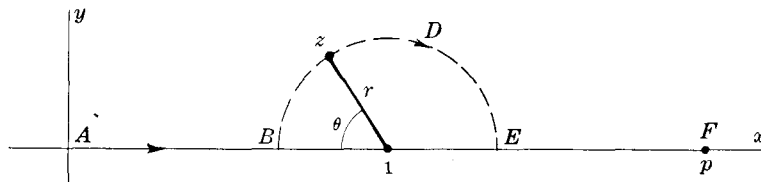


Fig. 2-29

Considérons le cas où z parcourt le contour $ABDEF$, où BDE est un demi-cercle représenté figure 2.29. Nous avons d'après cette figure

$$1 - z = 1 - x - iy = r \cos \theta - ir \sin \theta$$

$$\text{d'où } \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{(1 - z)(1 + z)} = \sqrt{r} (\cos \theta/2 - i \sin \theta/2) \sqrt{2 - r \cos \theta + ir \sin \theta}$$

$$\text{Sur } AB : z = x, r = 1 - x, \theta = 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - x} \sqrt{1 + x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Sur } EF : z = x, r = x - 1, \theta = \pi \quad \text{et} \quad \sqrt{1 - z^2} = -i\sqrt{x - 1} \sqrt{x + 1} = -i\sqrt{x^2 - 1}.$$

Donc quand z varie de 0 [où $x = 0$] à p [où $x = p$], $\sqrt{1 - z^2}$ varie de 1 à $-i\sqrt{p^2 - 1}$.

44. Déterminer une transformation qui fasse correspondre aux points $z = 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \dots$ du plan de la variable z , le point $w = 1$ du plan de la variable w [voir figures 2.30 et 2.31].

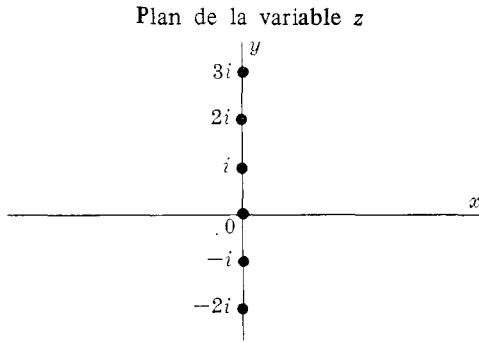


Fig. 2-30

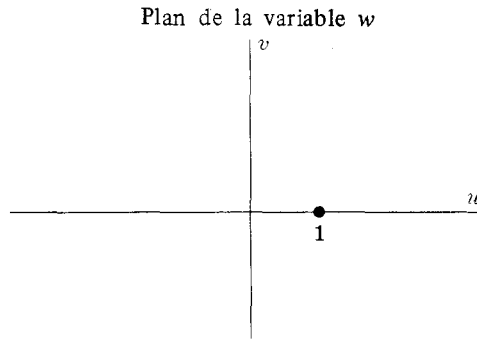


Fig. 2-31

Les points du plan de la variable z étant également répartis, nous sommes conduits d'après le problème 15, à considérer une fonction logarithmique du type $z = \text{Log } w$.

D'autre part si $w = 1 = e^{2k\pi i}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, alors $z = \text{Log } w = 2k\pi i$ et le point $w = 1$ est transformé en les points $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$.

Si nous considérons $z = (\text{Log } w)/2\pi$ le point $w = 1$ est transformé en $z = 0, \pm i, \pm 2i, \dots$ comme il est demandé. Inversement, au moyen de cette transformation les points $z = 0, \pm i, \pm 2i, \dots$ sont appliqués sur le point $w = 1$.

Une transformation possible est donc donnée par $z = (\text{Log } w)/2\pi$ ou $w = e^{2\pi z}$.

45. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re } \{z_n\} = \text{Re } \{l\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im } \{z_n\} = \text{Im } \{l\}$.

Soit $z_n = x_n + iy_n$ et $l = l_1 + il_2$, où x_n, y_n et l_1, l_2 sont respectivement les parties réelles et imaginaires de z_n et l .

Par hypothèse quel que soit $\epsilon > 0$ on peut trouver N tel que $|z_n - l| < \epsilon$ pour $n > N$, i.e.,

$$\begin{aligned} |x_n + iy_n - (l_1 + il_2)| &< \epsilon \quad \text{pour } n > N \\ \sqrt{(x_n - l_1)^2 + (y_n - l_2)^2} &< \epsilon \quad \text{pour } n > N \end{aligned}$$

d'où l'on en déduit que

$$|x_n - l_1| < \epsilon \quad \text{et} \quad |y_n - l_2| < \epsilon \quad \text{pour } n > N$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_2$, ainsi qu'il était demandé.

46. Démontrer que si $|a| < 1$,

$$(a) \quad 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

$$(b) \quad a \sin \theta + a^2 \sin 2\theta + a^3 \sin 3\theta + \dots = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

Posons $z = ae^{i\theta}$ dans le problème 41, ceci est possible car $|z| = |a| < 1$. D'où

$$1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + a^3 e^{3i\theta} + \dots = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad (1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + \dots) + i(a \sin \theta + a^2 \sin 2\theta + \dots) &= \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} \cdot \frac{1 - ae^{-i\theta}}{1 - ae^{-i\theta}} \\ &= \frac{1 - a \cos \theta + ia \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en égalant les parties réelles et imaginaires.

Problèmes supplémentaires

FONCTIONS ET TRANSFORMATIONS

47. Soit $w = f(z) = z(2 - z)$. Déterminer les valeurs de w correspondant à (a) $z = 1 + i$, (b) $z = 2 - 2i$ et indiquer graphiquement les valeurs correspondantes dans le plan des z et le plan des w . *Rép.* : (a) 2, (b) $4 + 4i$.
48. Si $w = f(z) = (1 + z)/(1 - z)$, déterminer (a) $f(i)$, (b) $f(1 - i)$ et représenter graphiquement les nombres complexes considérés. *Rép.* : (a) i , (b) $-1 - 2i$.
49. Si $f(z) = (2z + 1)/(3z - 2)$, $z \neq 2/3$, déterminer (a) $f(1/z)$, (b) $f\{f(z)\}$. *Rép.* : (a) $(2 + z)/(3 - 2z)$, (b) z .
50. (a) Si $w = f(z) = (z + 2)/(2z - 1)$, déterminer $f(0)$, $f(i)$, $f(1 + i)$. (b) Trouver les valeurs de z pour lesquelles $f(z) = i$, $f(z) = 2 - 3i$. (c) Montrer que z est une fonction uniforme de w . Déterminer les valeurs de z telles que $f(z) = z$ et expliquer géométriquement pourquoi ces points sont appelés les points fixes ou les points invariants de la transformation. *Rép.* : (a) -2 , $-i$, $1 - i$, (b) $-i$, $(2 + i)/3$.
51. Un carré S du plan de la variable z a pour sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, déterminer le domaine du plan de la variable w , transformé de S par (a) $w = z^2$, (b) $w = 1/(z + 1)$.
52. Reprendre le problème 51 avec un carré S de sommets $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.
53. Séparer les parties réelles et imaginaires pour les fonctions suivantes, i.e. trouver $u(x, y)$ et $v(x, y)$ tels que $f(z) = u + iv$: (a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$, (b) $f(z) = z + 1/z$, (c) $f(z) = (1 - z)/(1 + z)$, (d) $f(z) = z^{1/2}$.
- Rép.* : (a) $u = 2x^2 - 2y^2 + 3y$, $v = 4xy - 3x$ (c) $u = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$, $v = \frac{-2y}{(1 + x)^2 + y^2}$
- (b) $u = x + x/(x^2 + y^2)$, $v = y - y/(x^2 + y^2)$ (d) $u = r^{1/2} \cos \theta/2$, $v = r^{1/2} \sin \theta/2$
où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
54. Si $f(z) = 1/z = u + iv$, construire quelques représentants de la famille $u(x, y) = \alpha$, $v(x, y) = \beta$ où α et β sont des constantes ; montrer que ce sont des familles de cercles.

FONCTIONS MULTIFORMES

55. Soit $w^3 = z$ et supposons que $w = 1$ pour $z = 1$. (a) Si l'on part de $z = 1$ dans le plan de la variable z , et si l'on effectue un tour complet autour de l'origine dans le sens direct, déterminer la valeur de w quand on revient en $z = 1$. (b) Quelles sont les valeurs de w après 2, 3, 4 tours ? Reprendre (a) et (b) si le contour n'entoure pas l'origine.
- Rép.* : (a) $e^{2\pi i/3}$, $e^{4\pi i/3}$, 1, $e^{2\pi i/3}$
56. Soit $w = (1 - z^2)^{1/2}$, on suppose que $w = 1$ pour $z = 0$. (a) Si l'on part de $z = 0$ dans le plan de la variable z , et si l'on décrit dans le sens direct un contour fermé contenant $z = 1$ mais non $z = -1$, déterminer la valeur que prend w quand on revient la première fois en $z = 0$. (b) Quelles sont les valeurs prises successivement par w si l'on répète plusieurs fois cette opération ? (c) Reprendre (a) et (b) avec un circuit entourant $z = -1$ mais non $z = 1$. (d) Reprendre (a) et (b) avec un circuit entourant à la fois $z = 1$ et $z = -1$. (e) Reprendre (a) et (b) avec un circuit n'entourant ni $z = 1$, ni $z = -1$. (f) Expliquer pourquoi $z = 1$ et $z = -1$ sont des points de branchement. (g) Déterminer des coupures possibles.
57. Déterminer les points de branchement et les coupures pour les fonctions (a) $f(z) = \{z/(1 - z)\}^{1/2}$, (b) $f(z) = (z^2 - 4)^{1/3}$, (c) $f(z) = \text{Log } (z - z^2)$.

LES FONCTIONS ELEMENTAIRES

58. Démontrer que (a) $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$, (b) $|e^{iz}| = e^{-y}$.
59. Démontrer qu'il n'existe pas de valeur finie de z telle que $e^z = 0$.
60. Montrer que 2π est une période de e^{iz} . En existe-t-il d'autres ?
61. Déterminer toutes les valeurs de z pour lesquelles (a) $e^{3z} = 1$, (b) $e^{4z} = i$.
- Rép.* : (a) $2k\pi i/3$, (b) $\frac{1}{8}\pi i + \frac{1}{2}k\pi i$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
62. Démontrer que (a) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, (b) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, (c) $\sin^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$, (d) $\cos^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos z)$.
63. Démontrer que (a) $1 + \tan^2 z = 1/\cos^2 z$, (b) $1 + \cot^2 z = 1/\sin^2 z$.
64. Si $\cos z = 2$, calculer (a) $\cos 2z$, (b) $\cos 3z$. *Rép.* : (a) 7, (b) 26
65. Démontrer que toutes les racines de (a) $\sin z = a$, (b) $\cos z = a$, où $-1 \leq a \leq 1$, sont réelles.

66. Démontrer que si $|\sin z| \leq 1$ pour tout z , alors z est réel.
67. Montrer que (a) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, (b) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, (c) $\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} \bar{z}$.
68. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que $f(z) = u + iv$, i.e. séparer les parties réelles et imaginaires de: (a) $f(z) = e^{3iz}$, (b) $f(z) = \cos z$, (c) $f(z) = \sin 2z$, (d) $f(z) = z^2 e^{2z}$.
 Rép. (a) $u = e^{-3y} \cos 3x$, $v = e^{-3y} \sin 3x$, (b) $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \operatorname{sh} y$, (c) $u = \sin 2x \operatorname{ch} 2y$, $v = \cos 2x \operatorname{sh} 2y$, (d) $u = e^{2x}\{(x^2 - y^2) \cos 2y - 2xy \sin 2y\}$, $v = e^{2x}\{2xy \cos 2y + (x^2 - y^2) \sin 2y\}$
69. Démontrer que (a) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$, (b) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$, (c) $\operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th} z$.
70. Démontrer que (a) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$, (b) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$, (c) $1 - \operatorname{th}^2 z = 1/\operatorname{ch}^2 z$.
71. Montrer que (a) $\operatorname{sh}^2(z/2) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z - 1)$, (b) $\operatorname{ch}^2(z/2) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z + 1)$.
72. Déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$ telles que (a) $\operatorname{sh} 2z = u + iv$, (b) $z \operatorname{ch} z = u + iv$.
 Rép. (a) $u = \operatorname{sh} 2x \cos 2y$, $v = \operatorname{ch} 2x \sin 2y$
 (b) $u = x \operatorname{ch} x \cos y - y \operatorname{sh} x \sin y$, $v = y \operatorname{ch} x \cos y + x \operatorname{sh} x \sin y$
73. Trouver les valeurs de (a) $4 \operatorname{sh}(\pi i/3)$, (b) $\operatorname{ch}(2k + 1)\pi i/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (c) $\operatorname{coth} 3\pi i/4$.
 Rép. (a) $2i\sqrt{3}$, (b) 0, (c) i .
74. (a) Montrer que $\operatorname{Log}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (b) Quelle est la détermination principale?
 Rép. (b) $4\pi i/3$.
75. Quelles sont les valeurs de (a) $\operatorname{Log}(-4)$, (b) $\operatorname{Log}(3i)$, (c) $\operatorname{Log}(\sqrt{3} - i)$? Indiquer dans chaque cas la détermination principale.
 Rép. (a) $2 \operatorname{Log} 2 + (\pi + 2k\pi)i$, $2 \operatorname{Log} 2 + \pi i$. (b) $\operatorname{Log} 3 + (\pi/2 + 2k\pi)i$, $\operatorname{Log} 3 + \pi i/2$. (c) $\operatorname{Log} 2 + (11\pi/6 + 2k\pi)i$, $\operatorname{Log} 2 + 11\pi i/6$.
76. Montrer que $\operatorname{Log}(z - 1) = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\{(x - 1)^2 + y^2\} + i \operatorname{arctg} y/(x - 1)$, en donnant les restrictions si besoin est.
77. Montrer (a) $\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$, (b) $\operatorname{arccotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)$ en indiquant les restrictions possibles.
78. Montrer que (a) $\operatorname{argsh} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 + 1})$, (b) $\operatorname{argcoth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)$
79. Déterminer toutes les valeurs de (a) $\arcsin 2$, (b) $\arccos i$
 Rép. (a) $\pm i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3}) + \pi/2 + 2k\pi$ (b) $-i \operatorname{Log}(\sqrt{2} + 1) + \pi/2 + 2k\pi$, $-i \operatorname{Log}(\sqrt{2} - 1) + 3\pi/2 + 2k\pi$
80. Déterminer toutes les valeurs de (a) $\operatorname{argch} i$, (b) $\operatorname{argsh} \operatorname{Log}(-1)$.
 Rép. (a) $\operatorname{Log}(\sqrt{2} + 1) + \pi i/2 + 2k\pi i$, $\operatorname{Log}(\sqrt{2} - 1) + 3\pi i/2 + 2k\pi i$
 (b) $\operatorname{Log}[2k + 1] \pi + \sqrt{(2k + 1)^2 \pi^2 - 1} + \pi i/2 + 2m\pi i$,
 $\operatorname{Log}[\sqrt{(2k + 1)^2 \pi^2 - 1} - (2k + 1)\pi] + 3\pi i/2 + 2m\pi i$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
81. Déterminer toutes les valeurs de (a) $(1 + i)^i$, (b) $1^{\sqrt{2}}$.
 Rép. (a) $e^{-\pi/4 + 2k\pi} \{\cos(\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2) + i \sin(\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2)\}$, (b) $\cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi)$
82. Calculer (a) $\operatorname{Re}\{(1 - i)^{1+i}\}$, (b) $|(-i)^{-i}|$.
 Rép. (a) $e^{1/2 \operatorname{Log} 2 - 7\pi/4 - 2k\pi} \cos(7\pi/4 + \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2)$, (b) $e^{3\pi/2 + 2k\pi}$
83. Déterminer les parties réelle et imaginaire de z^z où $z = x + iy$.
84. Montrer que (a) $f(z) = (z^2 - 1)^{1/3}$, (b) $f(z) = z^{1/2} + z^{1/3}$ sont des fonctions algébriques de z .

POINTS DE BRANCHEMENT, COUPURES ET SURFACES DE RIEMANN.

85. Démontrer que $z = \pm i$ sont points de branchement pour $(z^2 + 1)^{1/3}$.
86. Construire une surface de Riemann pour les fonctions (a) $z^{1/3}$, (b) $z^{1/2}(z - 1)^{1/2}$, (c) $\left(\frac{z + 2}{z - 2}\right)^{1/3}$.
87. Montrer que la surface de Riemann de la fonction $z^{1/2} + z^{1/3}$ a 6 feuillets.
88. Construire les surfaces de Riemann des fonctions (a) $\operatorname{Log}(z + 2)$, (b) $\arcsin z$, (c) $\operatorname{arctg} z$.

LIMITES

89. (a) Si $f(z) = z^2 + 2z$, démontrer que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 2i - 1$.
 (b) Si $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & z \neq i \\ 3 + 2i & z = i \end{cases}$, déterminer $\lim_{z \rightarrow i}$ et justifier la réponse.
90. Montrer que $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} = 1 - \frac{1}{2}i$.
91. Deviner une valeur possible pour (a) $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{1-z}{1+z}$, (b) $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 2iz}{z^2 + 4}$; rechercher si la valeur conjecturée est correcte.
92. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, montrer que (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \{2f(z) - 3ig(z)\} = 2A - 3iB$,
 (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} \{pf(z) + qg(z)\} = pA + qB$ où p et q sont des constantes quelconques.
93. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, démontrer que (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z)\}^2 = A^2$, (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z)\}^3 = A^3$. Peut-on établir un résultat semblable pour $\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z)\}^n$? Ce résultat peut-il être admis sans restriction ?
94. Evaluer les expressions suivantes à l'aide des théorèmes sur les limites. On indiquera avec précision dans chaque cas les théorèmes employés.
 (a) $\lim_{z \rightarrow 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$ (c) $\lim_{z \rightarrow i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$ (e) $\lim_{z \rightarrow 1+i} \left\{ \frac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right\}^2$
 (b) $\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z^2}{z^4 + z + 1}$ (d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$
 Rép.: (a) $-12 + 6i$, (b) $\sqrt{2}(1+i)/2$, (c) $-4/3 - 4i$, (d) $1/3$, (e) $-1/4$
95. Evaluer $\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/3}} (z - e^{\pi i/3}) \left(\frac{z}{z^3 + 1} \right)$ Rép.: $1/6 - i\sqrt{3}/6$
96. Démontrer que si $f(z) = 3z^2 + 2z$, alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 6z_0 + 2$.
97. Si $f(z) = \frac{2z-1}{3z+2}$, démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{7}{(3z_0+2)^2}$ pourvu que $z_0 \neq -2/3$.
98. Si l'on ne considère que la branche de $f(z) = \sqrt{z^2 + 3}$ pour laquelle $f(0) = \sqrt{3}$, démontrer que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{z^2 + 3} - 2}{z - 1} = \frac{1}{2}$$
99. Expliquer exactement ce que l'on entend par (a) $\lim_{z \rightarrow i} 1/(z-i)^2 = \infty$, (b) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^4 + 1}{z^4 + 1} = 2$.
100. Montrer que (a) $\lim_{z \rightarrow \pi/2} (\sin z)/z = 2/\pi$, (b) $\lim_{z \rightarrow \pi i/2} z^2 \operatorname{ch} 4z/3 = \pi^2/8$.
101. Montrer que si l'on ne considère que la branche de $f(z) = \operatorname{argth} z$ telle que $f(0) = 0$, alors

$$\lim_{z \rightarrow -i} f(z) = 3\pi i/4.$$

CONTINUITE

102. Soit $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z - 2i}$ si $z \neq 2i$, cependant que $f(2i) = 3 + 4$ (a) Montrer que $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ existe et déterminer sa valeur. (b) La fonction $f(z)$ est-elle continue en $z = 2i$? Expliquer. (c) La fonction $f(z)$ est-elle continue en les points $z \neq 2i$? Expliquer.
103. Répondre au problème 102 si $f(2i)$ est définie comme étant égale à $4i$, et expliquer pourquoi des différences apparaissent.
104. Démontrer que $f(z) = z/(z^4 + 1)$ est continue en tout point du disque $|z| \leq 1$ excepté en quatre points que l'on déterminera. Rép. $e^{(2k+1)\pi i/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$
105. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont continues en $z = z_0$, montrer que $3f(z) - 4ig(z)$ est aussi continue en $z = z_0$.
106. Si $f(z)$ est continue en $z = z_0$, montrer que (a) $\{f(z)\}^2$ et (b) $\{f(z)\}^3$ sont aussi continues en $z = z_0$. Peut-on étendre ce résultat à $\{f(z)\}^n$ où n est un entier positif quelconque ?

107. Trouver tous les points de discontinuité des fonctions suivantes.

$$(a) f(z) = \frac{2z-3}{z^2+2z+2}, (b) f(z) = \frac{3z^2+4}{z^4-16}, (c) f(z) = \cotg z, (d) f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\cos z} (e) f(z) = \frac{\operatorname{th} z}{z^2+1}.$$

$$\text{Rép.: (a) } -1 \pm i \quad (c) k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(b) \pm 2, \pm 2i \quad (d) 0, (k + \frac{1}{2})\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (e) \pm i, (k + \frac{1}{2})\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

108. Démontrer que $f(z) = z^2 - 2z + 3$ est continue en tout point du plan complexe, à distance finie.

109. Montrer que $f(z) = \frac{z^2-1}{z^3+9}$ est (a) continue et (b) bornée dans le disque $|z| \leq 2$.

110. Montrer que si $f(z)$ est continue dans un domaine fermé, $f(z)$ y est bornée.

111. Montrer que $f(z) = 1/z$ est continue pour tout z tel que $|z| > 0$ mais n'est pas bornée.

112. Montrer qu'un polynôme est continu en tout point du plan complexe, à distance finie.

113. Montrer que $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-3z+2}$ est continue pour tout z extérieur à $|z| = 2$.

CONTINUITE UNIFORME

114. Montrer que $f(z) = 3z - 2$ est uniformément continue dans la région $|z| \leq 10$.

115. Montrer que $f(z) = 1/z^2$ (a) n'est pas uniformément continue dans la région $|z| \leq 1$ mais (b) est uniformément continue dans la région $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$.

116. Démontrer que si $f(z)$ est continue dans un domaine fermé $\mathcal{A}$, $f(z)$ est uniformément continue dans $\mathcal{A}$.

SUITES ET SERIES

117. Démontrer que (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 i^n}{n^3 - 1} = 0$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-3i} - \frac{in}{n+1} \right) = 1 - i$.

118. Démontrer que pour tout nombre complexe z , $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3z/n^2) = 1$.

119. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n = 0$.

120. Montrer que $\lim_{z \rightarrow \infty} n i^n$ n'existe pas.

121. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. La réciproque est-elle exacte ? Justifier la réponse.

122. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, montrer que (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$, (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = A/B$ si $B \neq 0$.

123. En utilisant les théorèmes sur les limites évaluer chacune des expressions suivantes.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n^2 + 3i)(n - i)}{in^3 - 3n + 4 - i} \right| \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \{ \sqrt{n+2i} - \sqrt{n+i} \}$$

$$\text{Rép.: (a) } \frac{1}{2}i, (b) 1, (c) 0, (d) \frac{1}{2}i$$

124. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = l$.

125. Montrer que la série $1 + i/3 + (i/3)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (i/3)^{n-1}$ est convergente ; calculer sa somme.
 Rép. $(9 + 3i)/10$

126. Montrer que la série $i - 2i + 3i - 4i + \dots$ diverge.

127. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge vers A , et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge vers B , montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ converge vers $A + iB$. La réciproque est-elle exacte ?

128. Etudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{5^{n/2}}$ où $\omega = \sqrt{3} + i$. Rép. convergente.

PROBLEMES DIVERS

129. On considère la fonction $w = \{(4 - z)(z^2 + 4)\}^{1/2}$. Si $w = 4$ quand $z = 0$, montrer que si z décrit la courbe C de la figure 2-32 alors la valeur de w à $z = 6$ est $-4i\sqrt{5}$.

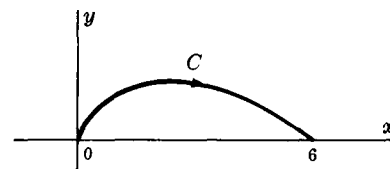


Fig. 2-32

130. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit continue en $z = z_0 = x_0 + iy_0$ est que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient continues en (x_0, y_0) .

131. Montrer que l'équation $\operatorname{tg} z = 0$ n'a que des racines réelles.

132. Un étudiant remarque que 1 élevé à n'importe quelle puissance est encore égal à 1. Est-ce correct ? Expliquer.

133. Montrer que $\frac{\sin \theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2^2} + \frac{\sin 3\theta}{2^3} + \dots = \frac{2 \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}$.

134. Montrer que la relation $|f(x + iy)| = |f(x) + f(iy)|$ est vérifiée par $f(z) = \sin z$. Pouvez-vous trouver d'autres fonctions pour lesquelles ceci est encore vrai ?

135. Montrer que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3z + 2}{z^4 + z^2 - 3z + 5} = 0$.

136. Montrer que $\left| \frac{1}{\sin z} \right| \leq 2e/(e^2 - 1)$ si $|y| \geq 1$.

137. Montrer que $\operatorname{Re} \{\arcsin z\} = \frac{1}{2} \{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}\}$.

138. Si $f(z)$ est continue dans un domaine fermé et borné α , montrer que (a) il existe un nombre positif M tel que pour tout z de α , $|f(z)| \leq M$, (b) $|f(z)|$ a une borne supérieure précise μ dans α et il existe au moins une valeur z_0 dans α telle que $|f(z_0)| = \mu$.

139. Montrer que $|\operatorname{th} \pi(1 + i)/4| = 1$.

140. Montrer que toutes les valeurs de $(1 - i)\sqrt{2}i$ appartiennent à une ligne droite.

141. Déterminer (a) $\operatorname{ch} \pi i/2$, (b) $\operatorname{argth}^\infty$. Rép. (a) 0, (b) $(2k + 1)\pi i/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

142. Si $\operatorname{tg} z = u + iv$, montrer que

$$u = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \quad v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$$

143. Déterminer avec trois décimales les valeurs de (a) e^{3-2i} , (b) $\sin(5 - 4i)$.

144. Démontrer que $\operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + i \operatorname{tg} (\theta/2)}{1 - i \operatorname{tg} (\theta/2)} \right\} = \cos \theta$, indiquer les valeurs remarquables.

145. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ et $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B \neq 0$, montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)/g(z) = A/B$ sans démontrer d'abord que $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/g(z) = 1/B$.

146. On considère la fonction $f(z)$ définie par $f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si } |z| \text{ est irrationnel} \end{cases}$. Montrer que $f(z)$ est discontinue pour toute valeur de z .

147. Montrer que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue dans un domaine du plan complexe, alors (a) $\operatorname{Re}\{f(z)\} = u(x, y)$ et (b) $\operatorname{Im}\{f(z)\} = v(x, y)$ le sont également.

148. Montrer que toutes les racines de $z \operatorname{tg} z = k$ où $k > 0$ sont réelles.

149. Montrer que si la limite d'une suite existe, elle est unique:

150. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge, montrant ainsi qu'une série dont le terme général tend vers 0, ne converge pas nécessairement.

151. Si $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + 1/z_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ et $-\pi/2 < \arg z_0 < \pi/2$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

Dérivation dans le domaine complexe

Équations de Cauchy-Riemann

DERIVEES

Si $f(z)$ est une fonction uniforme dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ du plan de la variable complexe z la dérivée de $f(z)$ est définie par

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1)$$

pourvu que cette limite existe indépendamment de la façon dont $\Delta z \rightarrow 0$. Dans de telles conditions on dit que $f(z)$ est dérivable en z . Nous utiliserons souvent h , au lieu de Δz dans la définition (1). Bien que la dérivabilité entraîne la continuité, la réciproque de cette propriété n'est pas vraie (voir problème 4).

FONCTIONS ANALYTIQUES

Si la dérivée $f'(z)$ existe en tout point z d'un ouvert connexe $\mathcal{R}$, alors $f(z)$ est dite analytique dans $\mathcal{R}$. Les expressions régulière et holomorphe sont souvent utilisées à la place de analytique.

Une fonction $f(z)$ est dite analytique en un point z_0 s'il existe un voisinage $|z - z_0| < \delta$ en tout point duquel $f'(z)$ existe.

EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

Une condition nécessaire pour que $w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ soit analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ est que, dans $\mathcal{R}$, u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Si les dérivées partielles qui figurent dans (2) sont continues dans $\mathcal{R}$, alors les équations de Cauchy-Riemann sont des conditions suffisantes pour que $f(z)$ soit analytique dans $\mathcal{R}$ (voir problème 5).

Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont souvent appelées fonctions conjuguées. Si l'on se donne l'une d'entre elles, on peut déterminer l'autre (à une constante additive près) de telle manière que $u + iv = f(z)$ soit analytique (voir problèmes 7 et 8).

FONCTIONS HARMONIQUES

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport à x et à y existent et sont continues dans $\mathcal{R}$, alors on peut tirer de (2) (voir problème 6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

On déduit de là que, sous ces conditions, les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{où} \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4)$$

L'opérateur ∇^2 est souvent appelé le laplacien.

Des fonctions telles que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui vérifient l'équation de Laplace dans $\mathcal{R}$ sont appelées fonctions harmoniques et sont dites harmoniques dans $\mathcal{R}$.

INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA DERIVEE

Soit z_0 [Fig. 3.1] un point P du plan de la variable z et soit w_0 [Fig. 3.2] son image P' dans le plan de la variable w , par la transformation $w = f(z)$. La fonction $f(z)$ étant supposée uniforme, le point z_0 se transforme en un seul point w_0 .

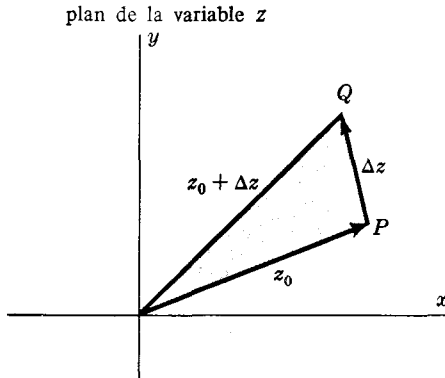


Fig. 3-1

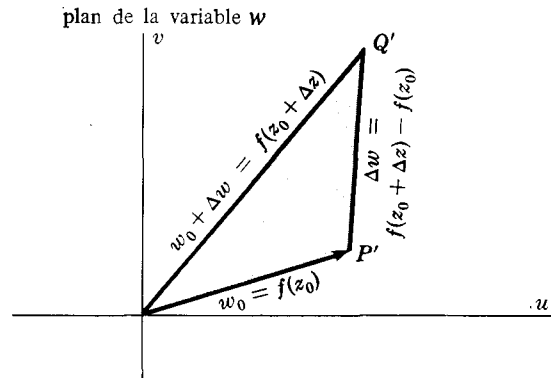


Fig. 3-2

Si nous donnons à z_0 un accroissement Δz nous obtenons le point Q de la figure 3.1. Ce point possède une image Q' dans le plan de la variable w . Nous voyons donc d'après la figure 3.2 que $P'Q'$ représente le nombre complexe $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. On en déduit que la dérivée en z_0 (si elle existe) est donnée par

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{Q' \rightarrow P'} \frac{Q'P'}{QP} \quad (5)$$

i.e. la limite du rapport $Q'P'/QP$ quand le point Q tend vers P . L'interprétation ci-dessus demeure toujours valable quand z_0 est remplacé par un point z quelconque.

DIFFERENTIELLES

Soit $\Delta z = dz$ un accroissement donné à z . Alors

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) \quad (6)$$

est appelé l'accroissement de $w = f(z)$. Si $f(z)$ est continue et possède une dérivée première continue dans $\mathcal{R}$, alors

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \epsilon \Delta z = f'(z) dz + \epsilon dz \quad (7)$$

où $\epsilon \rightarrow 0$ quand $\Delta z \rightarrow 0$. L'expression

$$dw = f'(z) dz \quad (8)$$

est appelée la différentielle de w ou de $f(z)$, ou encore la partie principale de Δw . On remarquera que $\Delta w \neq dw$ en général. On note par dz la différentielle de z .

Tenant compte des définitions (1) et (8), nous écrirons souvent

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (9)$$

Il est important de remarquer que dz et dw ne sont pas les limites de Δz et Δw quand $\Delta z \rightarrow 0$, car ces limites sont nulles, cependant que dz et dw ne le sont pas nécessairement. Etant donné dz nous pourrions déterminer dw à l'aide de (8), i.e. dw est une variable dépendante déterminée à partir des valeurs prises par la variable indépendante dz pour une valeur de z donnée.

Il est utile de considérer d/dz comme un opérateur qui agissant sur $w = f(z)$ donne $dw/dz = f'(z)$.

REGLES DE DERIVATION

Si $f(z)$, $g(z)$ et $h(z)$ sont des fonctions analytiques de z , les règles suivantes (qui sont les mêmes que celles utilisées dans le calcul différentiel élémentaire) sont valables.

1. $\frac{d}{dz}\{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) + g'(z)$
2. $\frac{d}{dz}\{f(z) - g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) - \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) - g'(z)$
3. $\frac{d}{dz}\{cf(z)\} = c \frac{d}{dz}f(z) = cf'(z)$ où c est une constante quelconque.
4. $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z) = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$
5. $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ if $g(z) \neq 0$

6. Si $w = f(\zeta)$ où $\zeta = g(z)$ alors

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = f'(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = f'\{g(z)\} g'(z) \quad (10)$$

De la même façon si $w = f(\zeta)$ où $\zeta = g(\eta)$ et $\eta = h(z)$, alors

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} \quad (11)$$

Les résultats (10) et (11) sont les formules de dérivation des fonctions composées.

7. Si $w = f(z)$, alors $z = f^{-1}(w)$; d'où dw/dz et dz/dw sont liés par

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} \quad (12)$$

8. Si $z = f(t)$ et $w = g(t)$ où t est un paramètre

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (13)$$

Des formules semblables peuvent être établies pour les différentielles. Par exemple

$$\begin{aligned} d\{f(z) + g(z)\} &= df(z) + dg(z) = f'(z) dz + g'(z) dz = \{f'(z) + g'(z)\} dz \\ d\{f(z)g(z)\} &= f(z) dg(z) + g(z) df(z) = \{f(z)g'(z) + g(z)f'(z)\} dz \end{aligned}$$

DERIVEES DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

Nous supposons dans les formules suivantes que les fonctions sont définies de la même manière que dans le Chapitre 2. Dans les cas où les fonctions considérées sont multiformes, la détermination de la fonction qui figure au premier membre sera choisie de façon à correspondre à celle de la fonction figurant dans le second membre. On notera que les résultats obtenus sont identiques à ceux établis dans le cas de fonctions de la variable réelle.

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$
3. $\frac{d}{dz} e^z = e^z$
4. $\frac{d}{dz} a^z = a^z \operatorname{Log} a$
5. $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$
6. $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$
7. $\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z}$
8. $\frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z = \frac{-1}{\sin^2 z}$
9. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos z} \operatorname{tg} z$
10. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{\sin z} \operatorname{cotg} z$
11. $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$
12. $\frac{d}{dz} \operatorname{Log}_a z = \frac{1}{z \operatorname{Log} a}$
13. $\frac{d}{dz} \arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\frac{d}{dz} \arccos z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\frac{d}{dz} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{1+z^2}$
16. $\frac{d}{dz} \operatorname{arccotg} z = \frac{-1}{1+z^2}$
17. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{z \sqrt{z^2-1}}$
18. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{z \sqrt{z^2-1}}$
19. $\frac{d}{dz} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z$
20. $\frac{d}{dz} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z$
21. $\frac{d}{dz} \operatorname{th} z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$
22. $\frac{d}{dz} \operatorname{coth} z = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 z}$
23. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{-1}{\operatorname{ch} z} \operatorname{th} z$
24. $\frac{d}{dz} \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{-1}{\operatorname{sh} z} \operatorname{coth} z$
25. $\frac{d}{dz} \operatorname{argsh} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\frac{d}{dz} \operatorname{argch} z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\frac{d}{dz} \operatorname{argth} z = \frac{1}{1-z^2}$
28. $\frac{d}{dz} \operatorname{argcoth} z = \frac{1}{1-z^2}$

DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

Si w est analytique dans un ouvert connexe, sa dérivée est notée $f'(z)$, w' ou dw/dz . Si $f'(z)$ est analytique également dans le même domaine sa dérivée est notée $f''(z)$, w'' ou

$$\left(\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

De la même façon la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ sera notée $f^{(n)}(z)$, $w^{(n)}$ ou $\frac{d^n w}{dz^n}$, n désignant l'ordre de la dérivation. Ainsi les dérivées du premier, deuxième, troisième, ... ordres seront notées $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$... Les calculs de ces dérivées d'ordre supérieur se font par applications répétées des règles de dérivation déjà vues.

Théorème. Si $f(z)$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, alors $f'(z)$, $f''(z)$... sont également analytiques dans $\mathcal{R}$, i.e. les dérivées de tous ordres existent dans $\mathcal{R}$.

Ce théorème important est démontré au Chapitre 5.

REGLE DE L'HOSPITAL

Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions analytiques dans un ouvert connexe contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors la règle de L'Hospital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad (14)$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau. (Voir problèmes 21-24)

Nous dirons quelquefois que le premier membre de (14) est une "forme indéterminée" $0/0$, bien que cette terminologie soit trompeuse étant donné que la plupart du temps cela n'entraîne aucune indétermination. Les limites représentées par ces formes indéterminées ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, ∞° , 0° , 1^∞ et $\infty - \infty$ peuvent souvent être évaluées par des applications convenables de la règle de L'Hospital.

POINTS SINGULIER

Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de $f(z)$. Il existe des types variés de singularités.

1. **Singularités isolées.** Le point $z = z_0$ est appelé singularité isolée, ou point singulier isolé de $f(z)$, si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le cercle $|z - z_0| = \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0 (i.e. il existe un δ voisinage pointé de z_0 , ne contenant pas de singularité). Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ , on dit que z_0 est une singularité non isolée.

Si z_0 n'est pas un point singulier et si l'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|z - z_0| = \delta$ ne contienne pas de point singulier, alors on dit que z_0 est un point ordinaire de $f(z)$.

2. **Pôles.** Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n . Si $n = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.

Exemple 1 : $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ a un pôle triple en $z = 2$.

Exemple 2 : $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et deux pôles simples $z = -1$ et $z = 4$.

Si $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, où $f(z_0) \neq 0$ et n est un entier positif, $z = z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de $g(z)$. Si $n = 1$ on dit que z_0 est un zéro simple. Dans un tel cas z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $1/g(z)$.

3. **Points de branchement.** Les points de branchement des fonctions multiformes déjà considérés au Chapitre 2, sont des points singuliers.

Exemple 1 : $f(z) = (z-3)^{1/2}$ a un point de branchement en $z = 3$.

Exemple 2 : $f(z) = \text{Log}(z^2 + z - 2)$ a un point de branchement pour les valeurs de z telles que $z^2 + z - 2 = 0$, i.e. en $z = 1$ et $z = -2$.

4. **Singularités apparentes.** Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de $f(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Exemple : Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

5. **Singularités essentielles.** Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Exemple : $f(z) = e^{1/(z-2)}$ a une singularité essentielle en $z = 2$.

Si une fonction est uniforme et possède une singularité, celle-ci ne peut être qu'un pôle ou une singularité essentielle. Pour cette raison un pôle est quelquefois appelé singularité

non essentielle. De manière équivalente on peut dire que z_0 est un point singulier essentiel si l'on ne peut trouver d'entier positif n tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6. Singularités à l'infini. La nature d'une singularité de $f(z)$ à $z = \infty$ [le point à l'infini ; voir pages 6 et 38] est la même que celle de $f(1/w)$ à $w = 0$.

Exemple : La fonction $f(z) = z^3$ a un pôle triple à $z = \infty$ car $f(1/w) = 1/w^3$ a un pôle triple en $z = 0$.

On verra au Chapitre 6 comment classer les singularités à l'aide des séries.

FAMILLES ORTHOGONALES

Si $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique, alors les deux familles de courbes à un paramètre

$$u(x, y) = \alpha, \quad v(x, y) = \beta \quad (15)$$

où α et β sont constants, sont orthogonales, i.e. chaque courbe d'une famille [en trait plein dans la Fig. 3-3] est perpendiculaire à toute courbe de l'autre famille [en pointillé dans la Fig. 3-3]. Dans le plan de la variable w , les courbes images correspondantes formées de droites parallèles aux axes des u et v , constituent également des familles orthogonales [voir Fig. 3-4].

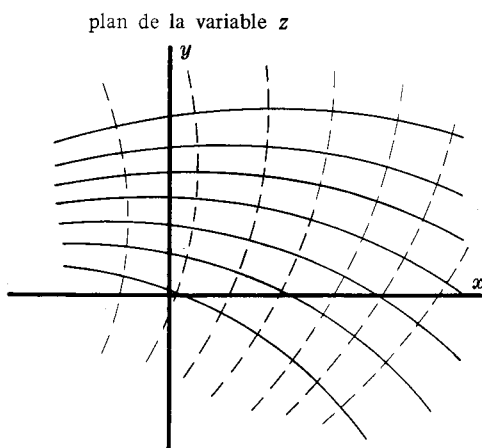


Fig. 3-3

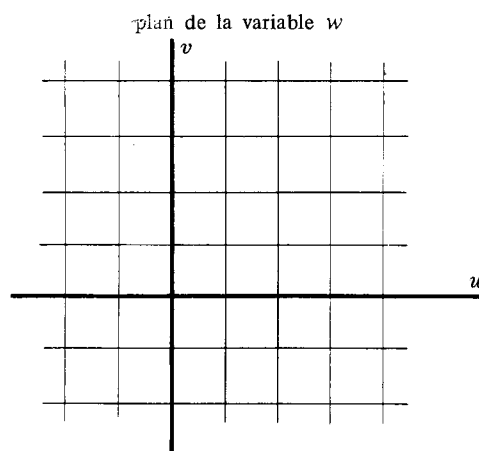


Fig. 3-4

Au vu de ces résultats on peut conjecturer que lorsque $f(z)$ est analytique l'angle formé par deux courbes sécantes C_1 et C_2 du plan de la variable z , est égal (en grandeur et sens) à l'angle des courbes images C'_1 et C'_2 dans le plan de la variable w . Cette conjecture est correcte et conduit à l'étude de la représentation conforme qui est d'une si grande importance théorique et pratique que deux Chapitres (8 et 9) lui sont consacrés.

COURBES

Si $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle t supposées continues pour $t_1 \leq t \leq t_2$, les équations paramétriques

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t) = z(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (16)$$

définissent une courbe continue ou un arc continu du plan de la variable z , joignant les points $a = z(t_1)$ et $b = z(t_2)$ [voir Fig. 3-5 ci-dessous].

Si $t_1 \neq t_2$ et $z(t_1) = z(t_2)$ i.e. $a = b$ les extrémités de l'arc coïncident et la courbe est dite fermée. Une courbe fermée qui ne se recoupe pas est dite une courbe fermée simple. Par exemple la courbe de la figure 3-6 est une courbe fermée simple cependant que celle de la figure 3-7 ne l'est pas.

Si $\phi(t)$ et $\psi(t)$ [et donc $z(t)$] ont des dérivées continues dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_2$, la courbe est souvent dite de classe C_1 . Une courbe formée d'un nombre fini d'arcs de classe C_1 sera dite de

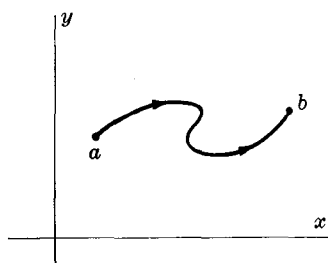


Fig. 3-5

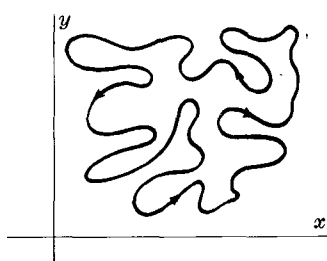


Fig. 3-6

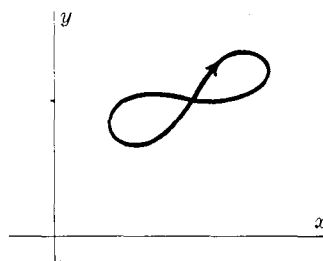


Fig. 3-7

classe C_1 par morceaux. Par exemple la frontière d'un carré est de la classe C_1 par morceaux.

Les courbes ou les courbes fermées simples que nous utiliserons seront toujours, sauf indication contraire, de classe C_1 par morceaux.

APPLICATIONS A LA GEOMETRIE ET A LA MECANIQUE

On peut associer à $z(t)$ la courbe C décrite par l'extrémité du vecteur associé dans un sens défini quand t varie de t_1 à t_2 . Si à $z(t)$ et à $z(t + \Delta t)$ sont associés les points P et Q , alors

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

est un vecteur de même direction que Δz [Fig. 3-8]. Si

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$ existe la limite est un vecteur qui définit la direction de la tangente à C en P est donnée par

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$$

Si t désigne le temps, dz/dt représente la vitesse avec laquelle l'extrémité de $z(t)$ décrit la courbe. De la même façon, d^2z/dt^2 représente l'accélération.

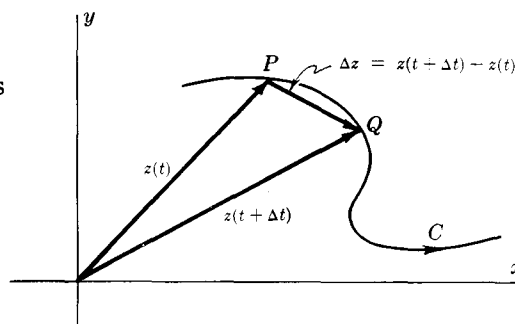


Fig. 3-8

OPERATEURS DIFFERENTIELS COMPLEXES

On définit les opérateurs ∇ et $\bar{\nabla}$ par

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (17)$$

où l'équivalence en termes de coordonnées conjuguées z et $\bar{z}$ (page 7) se déduit du problème 32.

GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN

L'opérateur ∇ nous servira à définir d'autres opérations. Dans tous les cas $F(x, y)$ sera une fonction continûment différentiable de x et y (scalaires) cependant que $A(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ sera une fonction complexe continûment différentiable de x et y .

En coordonnées conjuguées $F(x, y) = F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = G(z, \bar{z})$ et $A(x, y) = B(z, \bar{z})$.

1. **Gradient.** Nous définirons le gradient d'une fonction réelle (scalaire) par

$$\text{grad } F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \quad (18)$$

Géométriquement ceci représente un vecteur normal à la courbe $F(x, y) = c$ où c est une constante (voir problème 33).

De la même façon le gradient d'une fonction complexe $A = P + iQ$ (vecteur) est défini par

$$\begin{aligned}\text{grad } A &= \nabla A = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\end{aligned}\quad (19)$$

En particulier si B est une fonction analytique de z , alors $\partial B / \partial \bar{z} = 0$ et le gradient est nul i.e. $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, ce qui montre que dans ce cas les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

2. **Divergence.** En utilisant la définition du produit intérieur de deux nombres complexes (page 6) étendu au cas des opérateurs, nous définissons la divergence d'une fonction complexe (vecteur) par

$$\begin{aligned}\text{div } A &= \nabla \circ A = \text{Re} \{ \bar{\nabla} A \} = \text{Re} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) \right\} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial B}{\partial z} \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

De la même façon on peut définir la divergence d'une fonction réelle. On remarquera que la divergence d'une fonction complexe ou réelle (vecteur ou scalaire) est toujours une fonction réelle.

3. **Rotationnel.** En utilisant la définition du produit extérieur de deux nombres complexes (page 6) nous définissons le rotationnel d'une fonction complexe par

$$\begin{aligned}\text{rot } A &= \nabla \times A = \text{Im} \{ \bar{\nabla} A \} = \text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) \right\} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \text{Im} \left\{ \frac{\partial B}{\partial z} \right\}\end{aligned}\quad (21)$$

De la même façon, on peut définir le rotationnel d'une fonction réelle.

4. **Laplacien.** L'opérateur Laplacien est défini comme produit scalaire de l'opérateur ∇ par lui-même, i.e.

$$\begin{aligned}\nabla \circ \nabla &\equiv \nabla^2 \equiv \text{Re} \{ \bar{\nabla} \nabla \} = \text{Re} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\end{aligned}\quad (22)$$

On remarque que si A est analytique $\nabla^2 A = 0$ soit $\nabla^2 P = 0$ et $\nabla^2 Q = 0$, i.e. P et Q sont harmoniques.

QUELQUES IDENTITES ENTRE GRADIENT, DIVERGENCE ET ROTATIONNEL

Les identités suivantes sont vérifiées si A_1 , A_2 et A sont des fonctions différentiables.

1. $\text{grad } (A_1 + A_2) = \text{grad } A_1 + \text{grad } A_2$
2. $\text{div } (A_1 + A_2) = \text{div } A_1 + \text{div } A_2$
3. $\text{rot } (A_1 + A_2) = \text{rot } A_1 + \text{rot } A_2$
4. $\text{grad } (A_1 A_2) = (A_1)(\text{grad } A_2) + (\text{grad } A_1)(A_2)$
5. $\text{rot grad } A = 0$ si A est réelle, plus généralement si $\text{Im} \{A\}$ est harmonique.
6. $\text{div grad } A = 0$ si A est imaginaire ou, plus généralement si $\text{Re} \{A\}$ est harmonique.

Problèmes résolus

DERIVEES

1. A l'aide de la définition calculer la dérivée de $w = f(z) = z^3 - 2z$ aux points (a) $z = z_0$,
(b) $z = -1$.

(a) Par définition, la dérivée en $z = z_0$ est

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - 2(z_0 + \Delta z) - (z_0^3 - 2z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^3 + 3z_0^2\Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z_0 - 2\Delta z - z_0^3 + 2z_0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{3z_0^2 + 3z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - 2}{1} = 3z_0^2 - 2 \end{aligned}$$

En général, $f'(z) = 3z^2 - 2$ pour tout z .

(b) De (a), ou directement, nous trouvons que si $z_0 = -1$ alors $f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 = 1$.

2. Montrer que $\frac{d}{dz} \bar{z}$ n'a pas de sens quel que soit z , i.e. $f(z) = \bar{z}$ n'est analytique en aucun point.

Par définition
$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Si cette limite existe indépendamment de la manière dont $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tend vers 0, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\overline{x + iy + \Delta x + i\Delta y} - \overline{x + iy}}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Si $\Delta y = 0$, la limite cherchée est $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Si $\Delta x = 0$, la limite cherchée est $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.

La limite obtenue dépendant de la façon dont $\Delta z \rightarrow 0$, la dérivée n'existe pas i.e. $f(z)$ n'est analytique en aucun point.

3. Si $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$, (a) trouver $\frac{dw}{dz}$ et (b) déterminer en quels points $f(z)$ n'est pas analytique.

(a) *Méthode 1*, à l'aide de la définition

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + (z + \Delta z)}{1 - (z + \Delta z)} - \frac{1 + z}{1 - z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2}{(1 - z - \Delta z)(1 - z)} = \frac{2}{(1 - z)^2} \text{ si } z \neq 1 \end{aligned}$$

Méthode 2, à l'aide des règles de dérivation

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{(1-z) \frac{d}{dz}(1+z) - (1+z) \frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1) - (1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(b) La fonction $f(z)$ est analytique pour toute valeur finie de z sauf $z = 1$, valeur pour laquelle la dérivée n'existe pas et donc pour laquelle la fonction n'est pas analytique. Le point $z = 1$ est un point singulier de $f(z)$.

4. (a) Si $f(z)$ est analytique en z_0 , montrer que $f(z)$ est continue en z_0 .

(b) Donner un exemple montrant que la réciproque de (a) n'est pas exacte.

(a) De $f(z_0 + h) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot h$ où $h = \Delta z \neq 0$, nous tirons

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) - f(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

car $f'(z_0)$ existe par hypothèse. Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) - f(z_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$$

ce qui montre que $f(z)$ est continue en z_0 .

- (b) La fonction $f(z) = \bar{z}$ est continue en z_0 . Toutefois, par le problème 2, nous voyons que $f(z)$ n'est pas analytique et ceci quel que soit z . Ceci montre qu'une fonction continue n'a pas nécessairement de dérivée, i.e. n'est pas nécessairement analytique.

EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

5. Démontrer (a) qu'une condition nécessaire et (b) suffisante pour que $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

soit analytique dans $\mathcal{R}$ est que les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

soient satisfaites dans $\mathcal{R}$; on suppose que les dérivées partielles sont continues dans $\mathcal{R}$.

(a) Condition nécessaire. Pour que $f(z)$ soit analytique, la limite

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ = f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i v(x + \Delta x, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + i v(x, y)\}}{\Delta x + i \Delta y} \end{aligned} \quad (1)$$

doit exister indépendamment de la manière dont Δz (ou Δx et Δy) tend vers zéro. Nous envisagerons deux façons possibles de tendre vers zéro.

Cas 1. $\Delta y = 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. (1) devient dans ce cas

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \left[\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

pourvu que les dérivées partielles existent.

Cas 2. $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. (1) devient dans ce cas

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right\} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

La fonction $f(z)$ ne peut être analytique que si ces deux limites sont identiques. Une condition nécessaire pour que $f(z)$ soit analytique est donc que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(b) Condition suffisante. Les dérivées $\partial u / \partial x$ et $\partial u / \partial y$ étant supposées continues

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &= \{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)\} + \{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1 \right) \Delta y = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y \end{aligned}$$

où $\epsilon_1 \rightarrow 0$ et $\eta_1 \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$.

De même $\partial v / \partial x$ et $\partial v / \partial y$ étant supposées continues

$$\Delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon_2 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta_2 \right) \Delta y = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

où $\epsilon_2 \rightarrow 0$ et $\eta_2 \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$. D'où

$$\Delta w = \Delta u + i \Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y \quad (2)$$

où $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \rightarrow 0$ et $\eta = \eta_1 + i\eta_2 \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$

D'après les équations de Cauchy-Riemann, (2) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta y + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\Delta x + i \Delta y) + \epsilon \Delta x + \eta \Delta y\end{aligned}$$

D'où en divisant par $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ et faisant tendre Δz vers 0, on voit que

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

ce qui montre que la dérivée est unique, i.e. $f(z)$ est analytique dans α .

6. Si $f(z) = u + iv$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, démontrer que u et v sont harmoniques dans $\mathcal{R}$ si elles possèdent des dérivées partielles secondes continues dans $\mathcal{R}$.

Si $f(z)$ est analytique dans α les équations de Cauchy-Riemann (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et (2) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ sont satisfaites dans α . En supposant que u et v possèdent des dérivées partielles secondes continues, on obtient en dérivant (1) par rapport à x et (2) par rapport à y (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ et (4) $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ou $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, i.e. u est harmonique.

De la même manière en dérivant (1) par rapport à y et (2) par rapport à x , on trouve $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ et v est harmonique.

On verra plus loin (chapitre 5) que si $f(z)$ est analytique dans α , toutes ses dérivées existent et sont continues dans α . Les restrictions apportées ci-dessus ne sont donc pas nécessaires.

7. (a) Montrer que $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ est harmonique.

(b) Déterminer v telle que $f(z) = u + iv$ soit analytique.

$$\begin{aligned}(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= (e^{-x})(\sin y) + (-e^{-x})(x \sin y - y \cos y) = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y) = -2e^{-x} \sin y + x e^{-x} \sin y - y e^{-x} \cos y \quad (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-x}(x \cos y + y \sin y - \cos y) = x e^{-x} \cos y + y e^{-x} \sin y - e^{-x} \cos y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (x e^{-x} \cos y + y e^{-x} \sin y - e^{-x} \cos y) = -x e^{-x} \sin y + 2e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y \quad (2)\end{aligned}$$

Par addition de (1) et (2) on obtient $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ce qui montre que u est harmonique.

(b) Les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \cos y - x e^{-x} \cos y - y e^{-x} \sin y \quad (4)$$

En intégrant (3) par rapport à y , x étant constant, il vient

$$\begin{aligned}v &= -e^{-x} \cos y + x e^{-x} \cos y + e^{-x}(y \sin y + \cos y) + F(x) \\ &= y e^{-x} \sin y + x e^{-x} \cos y + F(x)\end{aligned} \quad (5)$$

où $F(x)$ est une fonction réelle arbitraire de x .

Par substitution de (5) dans (4) on obtient

$$-y e^{-x} \sin y - x e^{-x} \cos y + e^{-x} \cos y + F'(x) = -y e^{-x} \sin y - x e^{-x} \cos y - y e^{-x} \sin y$$

soit $F'(x) = 0$ et $F(x) = c$, c désignant une constante. D'où de (5)

$$v = e^{-x}(y \sin y + x \cos y) + c$$

On trouvera une autre méthode dans le problème 40.

8. Déterminer la fonction $f(z)$ du problème 7.

Méthode 1.

Nous avons $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + i v(x, y)$.

Posons $y = 0$, $f(x) = u(x, 0) + i v(x, 0)$.

En remplaçant x par z $f(z) = u(z, 0) + i v(z, 0)$.

D'où d'après le problème 7, $u(z, 0) = 0$, $v(z, 0) = ze^{-z}$ et donc $f(z) = u(z, 0) + i v(z, 0) = i ze^{-z}$, à une constante additive arbitraire près.

Méthode 2.

À une constante additive arbitraire près, nous avons, d'après le problème 7,

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + ie^{-x}(y \sin y + x \cos y) \\ &= e^{-x} \left\{ x \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) - y \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) \right\} + ie^{-x} \left\{ y \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) + x \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right) \right\} \\ &= i(x + iy) e^{-(x+iy)} = i ze^{-z} \end{aligned}$$

Méthode 3.

On sait que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. D'où par substitution dans $u(x, y) + i v(x, y)$ on trouve, après des calculs fastidieux, que $\bar{z}$ disparaît et que seul subsiste le résultat $i ze^{-z}$.

En général la méthode 1 est préférable aux méthodes 2 et 3 quand à la fois u et v sont connus. Si l'on ne connaît que u (ou v) une autre méthode est donnée au problème 101.

DIFFERENTIELLES

9. Si $w = f(z) = z^3 - 2z^2$, calculer (a) Δw , (b) dw , (c) $\Delta w - dw$.

$$\begin{aligned} (a) \Delta w &= f(z + \Delta z) - f(z) = \{(z + \Delta z)^3 - 2(z + \Delta z)^2\} - \{z^3 - 2z^2\} \\ &= z^3 + 3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z^2 - 4z \Delta z - 2(\Delta z)^2 - z^3 + 2z^2 \\ &= (3z^2 - 4z) \Delta z + (3z - 2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \end{aligned}$$

$$(b) dw = \text{partie principale de } \Delta w = (3z^2 - 4z) \Delta z = (3z^2 - 4z) dz, \text{ puisque par définition } \Delta z = dz.$$

On remarque que $f'(z) = 3z^2 - 4z$ et $dw = (3z^2 - 4z) dz$, i.e. $dw/dz = 3z^2 - 4z$.

$$(c) \text{ De (a) et (b) } \Delta w - dw = (3z - 2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 = \epsilon \Delta z \quad \text{où} \quad \epsilon = (3z - 2)\Delta z + (\Delta z)^2.$$

On remarquera que $\epsilon \rightarrow 0$ quand $\Delta z \rightarrow 0$, i.e. $\frac{\Delta w - dw}{\Delta z} \rightarrow 0$ quand $\Delta z \rightarrow 0$. On en déduit que $\Delta w - dw$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à Δz .

REGLES DE DERIVATION. DERIVEES DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

10. Démontrer les formules suivantes sachant que $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$.

$$(a) \frac{d}{dz} \{f(z) + g(z)\} = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{d}{dz} g(z)$$

$$(b) \frac{d}{dz} \{f(z) g(z)\} = f(z) \frac{d}{dz} g(z) + g(z) \frac{d}{dz} f(z)$$

$$(c) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\} = \frac{g(z) \frac{d}{dz} f(z) - f(z) \frac{d}{dz} g(z)}{[g(z)]^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0$$

$$\begin{aligned} (a) \frac{d}{dz} \{f(z) + g(z)\} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) + g(z + \Delta z) - \{f(z) + g(z)\}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{d}{dz} g(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \frac{d}{dz} \{f(z)g(z)\} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)\{g(z+\Delta z) - g(z)\} + g(z)\{f(z+\Delta z) - f(z)\}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z+\Delta z) \left\{ \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \right\} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} g(z) \left\{ \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right\} \\
 &= f(z) \frac{d}{dz} g(z) + g(z) \frac{d}{dz} f(z)
 \end{aligned}$$

On remarquera que nous avons utilisé le fait que $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z+\Delta z) = f(z)$ qui provient de la propriété de $f(z)$ d'être analytique donc continue (voir problème 4).

Autre méthode.

Soit $U = f(z)$, $V = g(z)$. Donc $\Delta U = f(z+\Delta z) - f(z)$ et $\Delta V = g(z+\Delta z) - g(z)$, i.e. $f(z+\Delta z) = U + \Delta U$, $g(z+\Delta z) = V + \Delta V$. On en déduit

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} UV &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(U + \Delta U)(V + \Delta V) - UV}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{U \Delta V + V \Delta U + \Delta U \Delta V}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(U \frac{\Delta V}{\Delta z} + V \frac{\Delta U}{\Delta z} + \frac{\Delta U}{\Delta z} \Delta V \right) = U \frac{dV}{dz} + V \frac{dU}{dz}
 \end{aligned}$$

où l'on notera que $\Delta V \rightarrow 0$ quand $\Delta z \rightarrow 0$ car V est supposée analytique donc continue.

Un procédé semblable peut être utilisé pour démontrer (a).

(c) Nous utiliserons la seconde méthode de (b). On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \left(\frac{U}{V} \right) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V} - \frac{U}{V} \right\} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V \Delta U - U \Delta V}{\Delta z (V + \Delta V) V} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{(V + \Delta V) V} \left\{ V \frac{\Delta U}{\Delta z} - U \frac{\Delta V}{\Delta z} \right\} = \frac{V(dU/dz) - U(dV/dz)}{V^2}
 \end{aligned}$$

La première méthode de b peut aussi être employée.

11. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz} e^z = e^z$, (b) $\frac{d}{dz} e^{az} = a e^{az}$ où a est une constante quelconque.

(a) Par définition, $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv$ ou $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

De $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$, on déduit que les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées. Donc d'après le problème 5 la dérivée cherchée existe et est égale à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

(b) Soit $w = e^\zeta$ où $\zeta = az$. Donc d'après la partie (a) et le problème 39,

$$\frac{d}{dz} e^{az} = \frac{d}{dz} e^\zeta = \frac{d}{d\zeta} e^\zeta \cdot \frac{d\zeta}{dz} = e^\zeta \cdot a = a e^{az}$$

On peut aussi procéder comme dans (a).

12. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$, (b) $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$, (c) $\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z}$

(a) Nous avons $w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. D'où

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y$$

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{sh} y = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ce qui montre que les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées. D'après le problème 5, la dérivée cherchée est donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y = \cos(x + iy) = \cos z$$

Autre méthode.

De $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, on tire à l'aide du problème 11(b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \sin z &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz} e^{iz} - \frac{1}{2i} \frac{d}{dz} e^{-iz} = \frac{1}{2} e^{iz} + \frac{1}{2} e^{-iz} = \cos z \\ (b) \quad \frac{d}{dz} \cos z &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} e^{iz} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} e^{-iz} \\ &= \frac{i}{2} e^{iz} - \frac{i}{2} e^{-iz} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z\end{aligned}$$

La première méthode de (a) peut aussi être utilisée.

(c) D'après la règle de dérivation d'un quotient (problème 10(c)) nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z &= \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{\cos z} \right) = \frac{\cos z \frac{d}{dz} \sin z - \sin z \frac{d}{dz} \cos z}{\cos^2 z} \\ &= \frac{(\cos z)(\cos z) - (\sin z)(-\sin z)}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}\end{aligned}$$

13. Démontrer que $\frac{d}{dz} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$, en tenant compte de ce que $z^{1/2}$ est une fonction multiforme.

Pour qu'une fonction soit dérivable, elle doit au moins être uniforme. Donc puisque $z^{1/2}$ est multiforme (2 déterminations possibles) nous devons nous restreindre à une seule branche de cette fonction.

Cas 1.

Considérons d'abord la branche de $w = z^{1/2}$ pour laquelle $w = 1$ quand $z = 1$. Dans ce cas $w^2 = z$ si bien que

$$\frac{dz}{dw} = 2w \quad \text{et donc} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dz} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

Cas 2.

Considérons maintenant la branche de $w = z^{1/2}$ pour laquelle $w = -1$ quand $z = 1$. Dans ce cas également nous avons $w^2 = z$ d'où

$$\frac{dz}{dw} = 2w \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dz} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$$

Dans les deux cas nous avons $\frac{d}{dz} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}$. On remarquera que la dérivée n'existe pas au point de branchement. En général une fonction n'est pas dérivable, i.e. n'est pas analytique en un point de branchement. Les points de branchement sont donc des points singuliers.

14. Démontrer que $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$.

Soit $w = \operatorname{Log} z$. D'où $z = e^w$ et $dz/dw = e^w = z$. Donc

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{z}$$

On remarque que le résultat est valable quelle que soit la branche de $\operatorname{Log} z$ considérée. On remarquera également que la dérivée n'existe pas au point de branchement $z = 0$, illustrant ainsi la remarque déjà faite à la fin du problème 13.

15. Démontrer que $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Soit $w = \operatorname{Log} \zeta$ où $\zeta = f(z)$. Donc

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

16. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, (b) $\frac{d}{dz} \operatorname{Argth} z = \frac{1}{1-z^2}$

(a) Si nous considérons la branche principale de $\operatorname{Arcsin} z$ nous avons d'après le problème 22 du chapitre 2 et d'après le problème 15

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{Arcsin} z &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + \sqrt{1-z^2}) \right\} \\ &= \frac{1}{i} \frac{d}{dz} (iz + \sqrt{1-z^2}) \bigg/ (iz + \sqrt{1-z^2}) \\ &= \frac{1}{i} \left\{ i + \frac{1}{2}(1-z^2)^{-1/2}(-2z) \right\} \bigg/ (iz + \sqrt{1-z^2}) \\ &= \left(1 + \frac{iz}{\sqrt{1-z^2}} \right) \bigg/ (iz + \sqrt{1-z^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \end{aligned}$$

Le résultat est également vrai si l'on considère d'autres branches.

(b) Nous avons en considérant la branche principale

$$\operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+z) - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1-z)$$

D'où

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1+z) - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1-z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{1-z^2}$$

On remarquera que dans (a) et (b) les dérivées n'existent ni en $+1$ ni en -1 .

17. En utilisant les règles de dérivations, calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes :

(a) $\cos^2(2z + 3i)$, (b) $z \operatorname{Arctg}(\operatorname{Log} z)$, (c) $\{\operatorname{Argth}(iz + 2)\}^{-1}$, (d) $(z - 3i)^{4z+2}$.

(a) Soit $\eta = 2z + 3i$, $\zeta = \cos \eta$, $w = \zeta^2$ d'où $w = \cos^2(2z + 3i)$. La règle de dérivation des fonctions donne alors

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dz} = (2\zeta)(-\sin \eta)(2) \\ &= (2 \cos \eta)(-\sin \eta)(2) = -4 \cos(2z + 3i) \sin(2z + 3i) \end{aligned}$$

Autre méthode.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{\cos(2z + 3i)\}^2 &= 2\{\cos(2z + 3i)\} \left\{ \frac{d}{dz} \cos(2z + 3i) \right\} \\ &= 2\{\cos(2z + 3i)\} \{-\sin(2z + 3i)\} \left\{ \frac{d}{dz} (2z + 3i) \right\} \\ &= -4 \cos(2z + 3i) \sin(2z + 3i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \frac{d}{dz} \{z \operatorname{Argtg}(\operatorname{Log} z)\} &= z \frac{d}{dz} \operatorname{Argtg}(\operatorname{Log} z) + \operatorname{Argtg}(\operatorname{Log} z) \frac{d}{dz}(z) \\ &= z \left\{ \frac{1}{1 + (\operatorname{Log} z)^2} \right\} \frac{d}{dz} \operatorname{Log} z + \operatorname{Arctg}(\operatorname{Log} z) \\ &= \frac{1}{1 + (\operatorname{Log} z)^2} + \operatorname{Arctg}(\operatorname{Log} z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \frac{d}{dz} \{\operatorname{Argtg}(iz + 2)\}^{-1} &= -1 \{\operatorname{Argth}(iz + 2)\}^{-2} \frac{d}{dz} \{\operatorname{Argth}(iz + 2)\} \\ &= -\{\operatorname{Argtg}(iz + 2)\}^{-2} \left\{ \frac{1}{1 - (iz + 2)^2} \right\} \frac{d}{dz} (iz + 2) \\ &= \frac{-i \{\operatorname{Argth}(iz + 2)\}^{-2}}{1 - (iz + 2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad \frac{d}{dz} \{(z-3i)^{4z+2}\} &= \frac{d}{dz} \{e^{(4z+2)\text{Log}(z-3i)}\} = e^{(4z+2)\text{Log}(z-3i)} \frac{d}{dz} \{(4z+2)\text{Log}(z-3i)\} \\
&= e^{(4z+2)\text{Log}(z-3i)} \left\{ (4z+2) \frac{d}{dz} [\text{Log}(z-3i)] + \text{Log}(z-3i) \frac{d}{dz} (4z+2) \right\} \\
&= e^{(4z+2)\text{Log}(z-3i)} \left\{ \frac{4z+2}{z-3i} + 4 \text{Log}(z-3i) \right\} \\
&= (z-3i)^{4z+1} (4z+2) + 4(z-3i)^{4z+1} \text{Log}(z-3i)
\end{aligned}$$

18. Si $w^3 - 3z^2w + 4\text{Log}z = 0$, trouver dw/dz .

En dérivant par rapport à z et en considérant w comme une fonction implicite de z , nous avons

$$\frac{d}{dz}(w^3) - 3 \frac{d}{dz}(z^2w) + 4 \frac{d}{dz}(\text{Log}z) = 0 \quad \text{ou} \quad 3w^2 \frac{dw}{dz} - 3z^2 \frac{dw}{dz} - 6zw + \frac{4}{z} = 0$$

D'où après résolution par rapport à dw/dz , nous obtenons $\frac{dw}{dz} = \frac{6zw - 4/z}{3w^2 - 3z^2}$.

19. Si $w = \text{Arcsin}(t-3)$ et $z = \cos(\text{Log}t)$, trouver dw/dz .

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{1/\sqrt{1-(t-3)^2}}{-\sin(\text{Log}t)[1/t]} = -\frac{t}{\sin(\text{Log}t)\sqrt{1-(t-3)^2}}$$

20. Dans le problème 18 calculer d^2w/dz^2 .

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{dw}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{6zw - 4/z}{3w^2 - 3z^2} \right) \\
&= \frac{(3w^2 - 3z^2)(6z \frac{dw}{dz} + 6w + 4/z^2) - (6zw - 4/z)(6w \frac{dw}{dz} - 6z)}{(3w^2 - 3z^2)^2}
\end{aligned}$$

Le résultat demandé s'en déduit en remplaçant dans cette expression dw/dz par sa valeur calculée dans le problème 18, et en simplifiant.

REGLE DE L'HOSPITAL

21. Démontrer que si $f(z)$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ contenant le point z_0 , alors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)$$

où $\eta \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow z_0$.

$$\text{Soit} \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \eta, \text{ alors}$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)$$

Tenant compte du fait que $f(z)$ est analytique en z_0 , nous en déduisons ainsi qu'il est demandé, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \eta = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\} = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$$

22. Démontrer que si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques en z_0 et si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$,

$$\text{Alors} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

D'après le problème 21 tenant compte de $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta_1(z-z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \eta_1(z-z_0)$$

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \eta_2(z-z_0) = g'(z_0)(z-z_0) + \eta_2(z-z_0)$$

où $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \eta_2 = 0$. Alors ainsi qu'il est demandé

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\{f'(z_0) + \eta_1\}(z-z_0)}{\{g'(z_0) + \eta_2\}(z-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Autre méthode.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \bigg/ \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \bigg/ \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\end{aligned}$$

23. Déterminer les limites suivantes (a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$, (b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$, (c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2}$.

(a) Si $f(z) = z^{10} + 1$ et $g(z) = z^6 + 1$, alors $f(i) = g(i) = 0$. D'autre part $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques en $z = i$. On a donc d'après la règle de L'Hospital

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{10z^9}{6z^5} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{5}{3} z^4 = \frac{5}{3}$$

(b) Si $f(z) = 1 - \cos z$ et $g(z) = z^2$, alors $f(0) = g(0) = 0$. D'autre part $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques en $z = 0$. On a donc par application de la règle de L'Hospital,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z}$$

Les fonctions $f_1(z) = \sin z$ et $S_1(z) = 2z$ étant analytiques et prenant la valeur 0 pour $z = 0$, on peut appliquer à nouveau la règle de L'Hospital et l'on obtient la limite cherchée.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$$

(c) Méthode 1. Par applications répétées de la règle de L'Hospital nous avons

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z \cos z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2 \cos z^2 - 4z^2 \sin z^2} = \frac{1}{2}$$

Méthode 2. De $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, on tire après une application de la règle de L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z \cos z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right) \left(\frac{1}{2 \cos z^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right) \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \cos z^2} \right) = (1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Méthode 3. De $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} = 1$ ou, ce qui est équivalent, de $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin z^2} = 1$, on tire

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z^2} \right) \left(\frac{z^2}{\sin z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

à l'aide de (b).

24. Déterminer $\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{1/z^2}$.

Soit $w = (\cos z)^{1/z^2}$. Alors $\text{Log } w = \frac{\text{Log } \cos z}{z^2}$ où l'on considère la détermination principale du logarithme. D'après la règle de L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \text{Log } w &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Log } \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(-\sin z)/\cos z}{2z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right) \left(-\frac{1}{2 \cos z} \right) = (1) \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

La fonction logarithme étant continue, nous en déduisons

$$\lim_{z \rightarrow 0} \text{Log } w = \text{Log} \left(\lim_{z \rightarrow 0} w \right) = -\frac{1}{2}$$

ou $\lim_{z \rightarrow 0} w = e^{-1/2}$ qui est le résultat demandé.

On notera que puisque $\lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1$ et $\lim_{z \rightarrow 0} 1/z^2 = \infty$ la limite demandée provient de la "forme indéterminée" 1^∞ .

POINTS SINGULIERS

25. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les singularités et leur nature ; on se bornera aux points à distance finie et l'on précisera si les singularités trouvées sont isolées ou non.

$$(a) f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{z}{\{(z + 2i)(z - 2i)\}^2} = \frac{z}{(z + 2i)^2(z - 2i)^2}.$$

Puisque $\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z + 2i)^2} = \frac{1}{8i} \neq 0$, $z = 2i$ est un pôle double. De même $z = -2i$ est aussi un pôle double.

Etant donné que nous pouvons déterminer δ tel qu'il n'existe pas d'autre singularité que $z = 2i$ dans le cercle $|z - 2i| = \delta$ (il suffit de choisir $\delta = 1$), on en déduit que $z = 2i$ est un point singulier isolé. De la même façon $z = -2i$ est aussi un point singulier isolé.

$$(b) f(z) = \frac{1}{\cos(1/z)}$$

On obtient des singularités pour $\cos(1/z) = 0$, i.e. $1/z = (2n + 1)\pi/2$ ou $z = 2/(2n + 1)\pi$, où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. De plus comme $f(z)$ n'est pas définie pour $z = 0$, cette valeur est aussi une singularité.

La règle de L'Hospital donne alors

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \left\{ z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right\} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \frac{z - 2/(2n+1)\pi}{\cos(1/z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \frac{1}{-\sin(1/z) \{-1/z^2\}} \\ &= \frac{\{2/(2n+1)\pi\}^2}{\sin(2n+1)\pi/2} = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Les singularités $z = 2/(2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sont donc des pôles d'ordre un, i.e. des pôles simples. On remarquera que ces pôles sont situés sur l'axe réel en $z = \pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \pm 2/5\pi, \dots$ et qu'il y en a une infinité dans tout intervalle fini contenant 0. (Voir figure 3.9).

Comme nous pouvons entourer chacune de ces singularités par un cercle de rayon δ n'en contenant pas d'autre, on en déduit qu'elles sont isolées. On notera que les δ utilisés décroissent quand on se rapproche de l'origine.

Etant donné que l'on ne peut pas trouver d'entier n tel que $\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^n f(z) = A \neq 0$, on en déduit que

$z = 0$ est une singularité essentielle. De plus comme tout cercle de rayon δ , aussi petit soit-il, centré en $z = 0$, contient d'autres singularités que $z = 0$ on en déduit que $z = 0$ est une singularité non isolée.

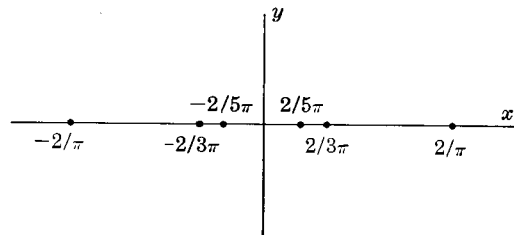


Fig. 3-9

$$(c) f(z) = \frac{\text{Log}(z - 2)}{(z^2 + 2z + 2)^4}$$

Le point $z = 2$ est un point de branchement et une singularité isolée. De $z^2 + 2z + 2 = 0$ on tire $z = -1 \pm i$ d'où $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 + i)(z + 1 - i)$ et $z = -1 \pm i$ sont donc des pôles d'ordre 4 qui sont des singularités isolées.

$$(d) f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Il apparaît à première vue que $z = 0$ est un point de branchement. Pour le vérifier on pose $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2\pi)}$ où $0 \leq \theta < 2\pi$.

Si $z = re^{i\theta}$, nous avons

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r} e^{i\theta/2})}{\sqrt{r} e^{i\theta/2}}$$

Si $z = re^{i(\theta + 2\pi)}$, nous avons

$$f(z) = \frac{\sin(\sqrt{r} e^{i\theta/2} e^{\pi i})}{\sqrt{r} e^{i\theta/2} e^{\pi i}} = \frac{\sin(-\sqrt{r} e^{i\theta/2})}{-\sqrt{r} e^{i\theta/2}} = \frac{\sin(\sqrt{r} e^{i\theta/2})}{\sqrt{r} e^{i\theta/2}}$$

La fonction ne possède donc qu'une seule branche et $z = 0$ ne peut être un point de branchement.

De $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1$, on déduit que $z = 0$ n'est en fait qu'une singularité apparente.

26. (a) Préciser la nature des singularités de $f(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2}$

(b) En quels points du plan $f(z)$ est-elle analytique ?

(a) Les singularités à distance finie dans le plan de la variable z sont $z = 1$ et $z = -2/3$; $z = 1$ est un pôle triple et $z = -2/3$ un pôle double.

Pour déterminer si $z = \infty$ (le point à l'infini) est un point singulier, on pose $z = 1/w$. Alors

$$f(1/w) = \frac{(1/w)^8 + (1/w)^4 + 2}{(1/w - 1)^3(3/w + 2)^2} = \frac{1 + w^4 + 2w^8}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2}$$

Le point $w = 0$ est un pôle triple pour la fonction $f(1/w)$, on en déduit que $z = \infty$ est un pôle triple pour la fonction $f(z)$.

La fonction donnée possède donc trois singularités : un pôle triple en $z = 1$, un pôle double en $z = -2/3$ et un pôle triple en $z = \infty$.

(b) De (a) et (b) on déduit que $f(z)$ est analytique en tout point à distance finie du plan complexe, distinct de $z = 1$ et $z = -2/3$.

FAMILLES ORTHOGONALES

27. On considère les deux familles de courbes représentées par $u(x, y) = \alpha$ et $v(x, y) = \beta$, où u et v sont les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique $f(z)$ et où α et β sont des constantes quelconques. Montrer que ces familles sont orthogonales (i.e. toute courbe d'une famille est orthogonale à toute courbe de l'autre famille en chaque point d'intersection).

Considérons une courbe de la première famille $u(x, y) = \alpha_1$ et une courbe de l'autre famille $v(x, y) = \beta_1$ (Fig. 3.10).

En dérivant $u(x, y) = \alpha_1$ par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

La pente de la tangente à la courbe $u(x, y) = \alpha_1$ est donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y}$$

De la même façon pour $v(x, y) = \beta_1$ on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial y}$$

Le produit des pentes est donc à l'aide des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Les courbes considérées sont donc orthogonales.

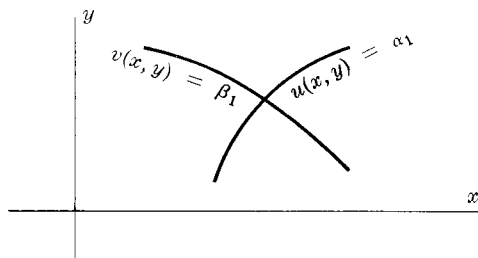


Fig. 3-10

28. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes du plan des xy , définie par $e^{-x}(x \sin y - y \cos y) = \alpha$ où α est une constante réelle.

D'après les problèmes 7 et 27 on trouve que $e^{-x}(y \sin y + x \cos y) = \beta$, où β désigne une constante réelle, est l'équation des trajectoires orthogonales cherchées.

APPLICATIONS A LA GEOMETRIE ET A LA MECANIQUE

29. Une ellipse C a pour équation $z = a \cos \omega t + bi \sin \omega t$ où a, b, ω sont des constantes positives, $a > b$, et t est une variable réelle. (a) Tracer l'ellipse et montrer que lorsque t croît à partir de $t = 0$, l'ellipse est décrite dans le sens direct. (b) Déterminer un vecteur unitaire tangent à C en chaque point de C .

(a) Quand t croît de 0 à $\pi/2\omega$, de $\pi/2\omega$ à π/ω , de π/ω à $3\pi/2\omega$, de $3\pi/2\omega$ à $2\pi/\omega$, le point z de C varie de A à B , de B à D , de D à E et de E à A , i.e. il se déplace dans le sens direct ainsi qu'il est indiqué sur la figure 3.11.

(b) Un vecteur tangent à C en un point t est

$$\frac{dz}{dt} = -a\omega \sin \omega t + b\omega i \cos \omega t$$

Un vecteur unitaire tangent à C est donc pour tout point t

$$\frac{dz/dt}{|dz/dt|} = \frac{-a\omega \sin \omega t + b\omega i \cos \omega t}{|-a\omega \sin \omega t + b\omega i \cos \omega t|} = \frac{-a \sin \omega t + bi \cos \omega t}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}}$$

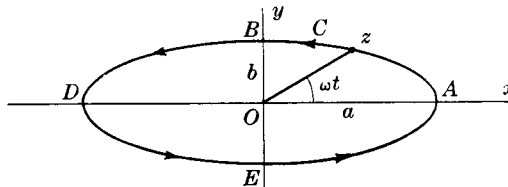


Fig. 3-11

30. Dans le problème 29 on suppose que z est le nombre complexe attaché à une particule se déplaçant sur C et que t est le temps.

- (a) Déterminer le vecteur vitesse ainsi que la vitesse de la particule à chaque instant.
 (b) Déterminer le vecteur accélération et le module de l'accélération.
 (c) Démontrer que $d^2 z/dt^2 = -\omega^2 z$. En donner une interprétation physique.
 (d) Déterminer les points pour lesquels la vitesse et l'accélération passent par un maximum ou un minimum.

(a) Vecteur vitesse $= dz/dt = -a\omega \sin \omega t + b\omega i \cos \omega t$

$$\text{Vitesse} = \text{module du vecteur vitesse} = |dz/dt| = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

(b) Vecteur accélération $= d^2 z/dt^2 = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 i \sin \omega t$

$$\text{Module du vecteur accélération} = |d^2 z/dt^2| = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}$$

(c) De (b) nous déduisons

$$d^2 z/dt^2 = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 i \sin \omega t = -\omega^2(a \cos \omega t + bi \sin \omega t) = -\omega^2 z$$

Physiquement ceci établit que l'accélération à chaque instant est centrale, dirigée vers O , de module proportionnel à la distance de la particule au point O . Quand la particule décrit l'ellipse sa projection sur l'axe des x et des y est animée d'un mouvement sinusoïdal de période $2\pi/\omega$. L'accélération est dite, dans ce cas, centrale ou centripète.

(d) De (a) et (b), on tire

$$\text{Module du vecteur vitesse} = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2(1 - \sin^2 \omega t)} = \omega \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 \omega t + b^2}$$

$$\text{Module du vecteur accélération} = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2(1 - \cos^2 \omega t)} = \omega^2 \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \omega t + b^2}$$

La vitesse a donc sa plus grande valeur [donnée par ωa] quand $\sin \omega t = \pm 1$, i.e. aux points B et E (Fig. 3.11), et sa plus petite valeur [ωb] quand $\sin \omega t = 0$, i.e. aux points A et D .

De la même manière la plus grande valeur de l'accélération [donnée par $\omega^2 a$] est obtenue pour $\cos \omega t = \pm 1$, i.e. aux points A et D , et la plus petite valeur [donnée par $\omega^2 b$] pour $\cos \omega t = 0$, i.e. aux points B et E .

Théoriquement les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil est un foyer. Dans la pratique il y a quelques différences entre la trajectoire et une ellipse parfaite.

GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN

31. Démontrer l'équivalence des opérateurs (a) $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, (b) $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ où $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Si F est une fonction continûment différentiable,

(a)
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$$

ce qui montre l'équivalence $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

(b)
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} (i) + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} (-i) = i\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right)$$

ce qui montre l'équivalence $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

32. Montrer que (a) $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, (b) $\bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z}$.

D'après les équivalences établies dans le problème 31, nous avons

(a)
$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

(b)
$$\bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - i^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial z}$$

33. Si $F(x, y) = c$ [où c est une constante et F est continûment différentiable] est une courbe du plan des xy , montrer que $\text{grad } F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y}$, est un vecteur normal à la courbe considéré.

Nous avons $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$. En termes de produit intérieur ceci peut être écrit [voir page 6]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \circ (dx + i dy) = 0$$

Mais $dx + i dy$ est un vecteur tangent à C . D'où $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y}$ doit être perpendiculaire à C .

34. Montrer que $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$ où $B(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

D'après le problème 32, $\nabla B = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$. D'où

$$\nabla B = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

35. Soit C la courbe du plan des xy définie par $3x^2y - 2y^3 = 5x^4y^2 - 6x^2$. Déterminer un vecteur unitaire normal à C en $(1, -1)$.

Soit $F(x, y) = 3x^2y - 2y^3 - 5x^4y^2 + 6x^2 = 0$. D'après le problème 33, un vecteur normal à C est

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = (6xy - 20x^3y^2 + 12x) + i(3x^2 - 6y^2 - 10x^4y) = -14 + 7i \quad \text{en } (1, -1)$$

Un vecteur unitaire normal à C en $(1, -1)$ est donc $\frac{-14 + 7i}{|-14 + 7i|} = \frac{-2 + i}{\sqrt{5}}$. Un autre vecteur unitaire normal est $\frac{2 - i}{\sqrt{5}}$.

36. Si $A(x, y) = 2xy - ix^2y^3$, déterminer (a) $\text{grad } A$, (b) $\text{div } A$, (c) $\text{rot } A$, (d) laplacien de A .

$$\begin{aligned} (a) \quad \text{grad } A \quad \nabla A &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy - ix^2y^3) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy - ix^2y^3) + i \frac{\partial}{\partial y} (2xy - ix^2y^3) \\ &= 2y - 2ixy^3 + i(2x - 3ix^2y^2) = 2y + 3x^2y^2 + i(2x - 2xy^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \text{div } A &= \nabla \circ A = \text{Re} \{ \bar{\nabla} A \} = \text{Re} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy - ix^2y^3) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy) - \frac{\partial}{\partial y} (x^2y^3) = 2y - 3x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \text{rot } A &= \nabla \times A = \text{Im} \{ \bar{\nabla} A \} = \text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (2xy - ix^2y^3) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-x^2y^3) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy) = -2xy^3 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \text{laplacien de } A &= \nabla^2 A = \text{Re} \{ \bar{\nabla} \nabla A \} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (2xy - ix^2y^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (2xy - ix^2y^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2y - 2ixy^3) + \frac{\partial}{\partial y} (2x - 3ix^2y^2) = -2iy^3 - 6ix^2y \end{aligned}$$

PROBLEMES DIVERS

37. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Nous avons $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arctg}(y/x)$. D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \quad (2)$$

De la même façon

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta \quad (4)$$

D'après l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ nous avons, tenant compte de (1) et (4)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sin \theta = 0 \quad (5)$$

D'après l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ nous avons, tenant compte de (2) et (3)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta = 0 \quad (6)$$

En multipliant (5) par $\cos \theta$, (6) par $\sin \theta$ et en additionnant, il vient $\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$.

En multipliant (5) par $-\sin \theta$, (6) par $\cos \theta$ et en additionnant, il vient $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ ou $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

38. Montrer que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe exprimée sous forme polaire, vérifient l'équation [équation de Laplace en coordonnées polaires]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

D'après le problème 37, (1) $\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}$, (2) $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$

Pour éliminer v on dérive (1) par rapport à r et (2) par rapport à θ , d'où

$$(3) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Mais $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$ si l'on suppose les dérivées partielles secondes continues. D'où d'après (3) et (4)

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

De la même façon, par élimination de v on trouve $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0$ ce qui établit le résultat cherché.

39. Si $w = f(\zeta)$ où $\zeta = g(z)$ démontrer que $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$ pourvu que f et g soient analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$.

Donnons à z un accroissement $\Delta z \neq 0$ tel que $z + \Delta z$ soit dans $\mathcal{R}$. Par conséquent ζ et w s'accroissent respectivement de $\Delta \zeta$ et Δw , où

$$\Delta w = f(\zeta + \Delta \zeta) - f(\zeta), \quad \Delta \zeta = g(z + \Delta z) - g(z) \quad (1)$$

On remarque que $\Delta w \rightarrow 0$ et $\Delta \zeta \rightarrow 0$ quand $\Delta z \rightarrow 0$.

Si $\Delta \zeta \neq 0$, on écrit $\epsilon = \frac{\Delta w}{\Delta \zeta} - \frac{dw}{d\zeta}$ d'où $\epsilon \rightarrow 0$ quand $\Delta \zeta \rightarrow 0$ et

$$\Delta w = \frac{dw}{d\zeta} \Delta \zeta + \epsilon \Delta \zeta \quad (2)$$

Si $\Delta\zeta = 0$ pour des valeurs de Δz , alors (1) montre que $\Delta w = 0$ pour ces valeurs. Pour de tels cas on prend $\epsilon = 0$.

On en déduit que dans chacun des cas $\Delta\zeta \neq 0$ ou $\Delta\zeta = 0$, (2) est vérifiée. D'où en divisant (2) par $\Delta z \neq 0$ et en passant à la limite quand $\Delta z \rightarrow 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{dw}{d\zeta} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} + \epsilon \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \\ &= \frac{dw}{d\zeta} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \epsilon \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \\ &= \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} + 0 \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \end{aligned}$$

40. (a) Si $u_1(x, y) = \partial u / \partial x$ et $u_2(x, y) = \partial u / \partial y$, démontrer que $f'(z) = u_1(z, 0) - i u_2(z, 0)$.

(b) Démontrer que le résultat de (a) peut être utilisé pour résoudre les problèmes 7 et 8.

(a) D'après le problème 5, nous avons $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = u_1(x, y) - i u_2(x, y)$.

Ce qui devient pour $y = 0$ $f'(x) = u_1(x, 0) - i u_2(x, 0)$.

Remplaçant alors x par z nous avons comme demandé $f'(z) = u_1(z, 0) - i u_2(z, 0)$.

(b) On donne $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$, nous avons donc

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x} \sin y - x e^{-x} \sin y + y e^{-x} \cos y \\ u_2(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial y} = x e^{-x} \cos y + y e^{-x} \sin y - e^{-x} \cos y \end{aligned}$$

d'où d'après (a)

$$f'(z) = u_1(z, 0) - i u_2(z, 0) = 0 - i(z e^{-z} - e^{-z}) = -i(z e^{-z} - e^{-z})$$

En intégrant par rapport à z nous avons à une constante près, $f(z) = i z e^{-z}$. Par séparation des parties réelles et imaginaires il vient $v = e^{-x}(y \sin y + x \cos y)$ à une constante près.

41. Démontrer que $\text{rot grad } A = 0$ si A est réelle ou plus généralement, si $\text{Im } A$ est harmonique.

$$\text{Si } A = P + Qi, \quad \text{grad } A = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad \text{D'où}$$

$$\begin{aligned} \text{rot grad } A &= \text{Im} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ &= \text{Im} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + i \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) - i \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \end{aligned}$$

D'où si $Q = 0$, i.e. A est réelle, ou si Q est harmonique, $\text{rot grad } A = 0$.

42. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = x^2 - y^2$.

Soit $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ d'où $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. On en déduit

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}$$

L'équation donnée devient donc $4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2)$ ou

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{8}(z^2 + \bar{z}^2) \quad (1)$$

En intégrant (1) par rapport à z (en considérant $\bar{z}$ comme une constante)

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{z^3}{24} + \frac{z\bar{z}^2}{8} + F_1(\bar{z}) \quad (2)$$

où $F_1(\bar{z})$ est une fonction arbitraire de $\bar{z}$. En intégrant (2) par rapport à $(\bar{z})$

$$U = \frac{z^3\bar{z}}{24} + \frac{z\bar{z}^3}{24} + F(\bar{z}) + G(z) \quad (3)$$

où $F(\bar{z})$ est une fonction obtenue en intégrant $F_1(\bar{z})$ et $G(z)$ une fonction arbitraire de z . Remplaçant z par $x + iy$ et $\bar{z}$ par $x - iy$, il vient

$$U = \frac{1}{12}(x^4 - y^4) + F(x - iy) + G(x + iy)$$

Problèmes supplémentaires

DERIVEES

43. A l'aide de la définition, déterminer les dérivées des fonctions suivantes aux points indiqués.

$$(a) f(z) = 3z^2 + 4iz - 5 + i; \quad z = 2. \quad (b) f(z) = \frac{2z - i}{z + 2i}; \quad z = -i. \quad (c) f(z) = 3z^{-2}; \quad z = 1 + i.$$

$$\text{Rép. (a) } 12 + 4i \quad (b) -5i \quad (c) 3/2 - 3i/2$$

44. Démontrer que $\frac{d}{dz}(z^2 \bar{z})$ n'existe en aucun point.

45. La fonction $|z|^2$ est-elle partout dérivable ?

46. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points singuliers, i.e. les points en lesquels la fonction n'est pas analytique. Calculer les dérivées en les autres points. (a) $\frac{z}{z+i}$, (b) $\frac{3z-2}{z^2+2z+5}$.

$$\text{Rép. (a) } -i, i/(z+i)^2; \quad (b) -1 \pm 2i, (19+4z-3z^2)/(z^2+2z+5)^2$$

EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

47. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites par les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes ; en déduire l'analyticité de chacune de ces fonctions.

$$(a) f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i, \quad (b) f(z) = ze^{-z}, \quad (c) f(z) = \sin 2z.$$

48. Montrer que la fonction $x^2 + iy^3$ est non analytique en tout point. Cela est-il compatible avec le fait que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites au point $x = 0, y = 0$?

49. Montrer que si $w = f(z) = u + iv$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, alors $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y}$.

50. (a) Montrer que la fonction $u = 2x(1-y)$ est harmonique. (b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit analytique [i.e. déterminer la fonction conjuguée de u]. (c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z .

$$\text{Rép. (b) } 2y + x^2 - y^2, \quad (c) iz^2 + 2z$$

51. Répondre aux questions du problème 50 pour la fonction $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$. Rép. (b) $x^2 - y^2 + 2xy - 3x$

52. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites par les fonctions (a) e^{z^2} , (b) $\cos 2z$, (c) $\operatorname{sh} 4z$.

53. Déterminer parmi les fonctions u suivantes, celles qui sont harmoniques. Pour chaque fonction harmonique trouvée, déterminer la fonction harmonique conjuguée v et exprimer $u + iv$ comme fonction analytique de z .

$$(a) 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2, \quad (b) 2xy + 3xy^2 - 2y^3, \quad (c) xe^x \cos y - ye^x \sin y, \quad (d) e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2).$$

$$\text{Rép. (a) } v = 4xy - x^3 + 3xy^2 + c, \quad f(z) = 2z^2 - iz^3 + ic \quad (c) ye^x \cos y + xe^x \sin y + c, \quad ze^z + ic$$

$$(b) \text{ Non harmonique} \quad (d) -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) + c, \quad -ie^{iz^2} + ic$$

54. (a) Montrer que $\psi = \text{Log}[(x-1)^2 + (y-2)^2]$ est harmonique dans tout ouvert connexe ne contenant pas le point $(1, 2)$. (b) Trouver une fonction ϕ telle que $\phi + i\psi$ soit analytique. (c) Exprimer $\phi + i\psi$ à l'aide de la variable z seule.

Rép. (b) $-2 \arctg \{(y-2)/(x-1)\}$ (c) $2i \text{Log}(z-1-2i)$

55. Si $\text{Im } f'(z) = 6x(2y-1)$ et $f(0) = 3-2i$, $f(1) = 6-5i$, calculer $f(1+i)$. Rép. $6+3i$.

DIFFERENTIELLES

56. Si $w = iz^2 - 4z + 3i$, trouver (a) Δw , (b) dw , (c) $\Delta w - dw$ au point $z = 2i$.

Rép. (a) $-8\Delta z + i(\Delta z)^2 = -8dz + i(dz)^2$, (b) $-8dz$, (c) $i(dz)^2$

57. Déterminer (a) Δw et (b) dw si $w = (2z+1)^3$, $z = -i$, $\Delta z = 1+i$. Rép. (a) $38-2i$, (b) $6-42i$

58. Si $w = 3iz^2 + 2z + 1 - 3i$, trouver (a) Δw , (b) dw , (c) $\Delta w/\Delta z$, (d) dw/dz pour $z = i$.

Rép. (a) $-4\Delta z + 3i(\Delta z)^2$, (b) $-4dz$, (c) $-4 + 3i\Delta z$, (d) -4

59. (a) Si $w = \sin z$, montrer que $\frac{\Delta w}{\Delta z} = (\cos z) \left(\frac{\sin \Delta z}{\Delta z} \right) - 2 \sin z \left\{ \frac{\sin^2(\Delta z/2)}{\Delta z} \right\}$.

(b) En utilisant $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta z}{\Delta z} = 1$, montrer que $\frac{dw}{dz} = \cos z$.

(c) Montrer que $dw = (\cos z) dz$.

60. (a) Si $w = \text{Log } z$, montrer que si $\Delta z/z = \xi$, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1}{z} \text{Log} \{(1+\xi)^{1/\xi}\}$.

(b) A l'aide de $\lim_{\xi \rightarrow 0} (1+\xi)^{1/\xi} = e = 2,71828\dots$, démontrer que $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$.

(c) Démontrer que $d(\text{Log } z) = dz/z$

61. Démontrer que (a) $d\{f(z)g(z)\} = \{f(z)g'(z) + g(z)f'(z)\} dz$

(b) $d\{f(z)/g(z)\} = \{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)\} dz / \{g(z)\}^2$

en faisant des hypothèses convenables sur $f(z)$ et $g(z)$.

REGLES DE DÉRIVATION. DERIVEES DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

62. Démontrer que si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, alors

(a) $\frac{d}{dz} \{2if(z) - (1+i)g(z)\} = 2if'(z) - (1+i)g'(z)$, (b) $\frac{d}{dz} \{f(z)\}^2 = 2f(z)f'(z)$, (c) $\frac{d}{dz} \{f(z)\}^{-1} = -\{f(z)\}^{-2} f'(z)$.

63. A l'aide des règles de dérivation calculer les dérivées des fonctions suivantes (a) $(1+4i)z^2 - 3z - 2$,

(b) $(2z+3i)(z-i)$, (c) $(2z-i)/(z+2i)$, (d) $(2iz+1)^2$, (e) $(iz-1)^{-3}$.

Rép. (a) $(2+8i)z - 3$, (b) $4z+i$, (c) $5i/(z+2i)^2$, (d) $4i-8z$, (e) $-3i(iz-1)^{-4}$

64. Calculer les dérivées des fonctions suivantes aux points indiqués.

(a) $(z+2i)(i-z)/(2z-1)$, $z = i$. (b) $\{z + (z^2+1)^2\}^2$, $z = 1+i$.

Rép. (a) $-6/5 + 3i/5$, (b) $-108 - 78i$

65. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\cos z} \right) = \frac{1}{\cos z} \text{tg } z$, (b) $\frac{d}{dz} \cotg z = -\frac{1}{\sin^2 z}$

66. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz} (z^2+1)^{1/2} = \frac{z}{(z^2+1)^{1/2}}$, (b) $\frac{d}{dz} \text{Log}(z^2+2z+2) = \frac{2z+2}{z^2+2z+2}$ en faisant au besoin quelques restrictions.

67. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes en faisant les restrictions nécessaires.

(a) $3 \sin^2(z/2)$, (b) $\operatorname{tg}^3(z^2 - 3z + 4i)$, (c) $\operatorname{Log}(1/\cos z + \operatorname{tg} z)$, (d) $1/\sin\{(z^2 + 1)^{1/2}\}$, (e) $(z^2 - 1) \cos(z + 2i)$.

Rép. (a) $3 \sin(z/2) \cos(z/2)$

(b) $3(2z - 3) \operatorname{tg}^2(z^2 - 3z + 4i) \{\cos(z^2 - 3z + 4i)\}^{-2}$

(c) $1/\cos z$

(d) $\frac{-z/\sin\{(z^2 + 1)^{1/2}\} \cotg\{(z^2 + 1)^{1/2}\}}{(z^2 + 1)^{1/2}}$

(e) $(1 - z^2) \sin(z + 2i) + 2z \cos(z + 2i)$

68. Démontrer que (a) $\frac{d}{dz}(1 + z^2)^{3/2} = 3z(1 + z^2)^{1/2}$, (b) $\frac{d}{dz}(z + 2\sqrt{z})^{1/3} = \frac{1}{3}z^{-1/2}(z + 2\sqrt{z})^{-2/3}(\sqrt{z} + 1)$.

69. Démontrer que $\frac{d}{dz}(\operatorname{arctg} z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

70. Démontrer que $\frac{d}{dz}(\arcsin z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$

71. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

(a) $\{\arcsin(2z - 1)\}^2$

(c) $\arccos(\sin z - \cos z)$

(e) $\operatorname{argcoth}(z/\sin 2z)$

(b) $\log\{\operatorname{arccotg} z^2\}$

(d) $\operatorname{arctg}(z + 3i)^{-1/2}$

(f) $\operatorname{Log}\{z - \frac{3}{2} + \sqrt{z^2 - 3z + 2i}\}$

Rép. (a) $2 \arcsin(2z - 1)/(z - z^2)^{1/2}$

(d) $-1/2(z + 1 + 3i)(z + 3i)^{1/2}$

(b) $-2z/(1 + z^4) \operatorname{arccotg} z^2$

(e) $(1 - 2z \cotg 2z)/(1 - z^2/\sin^2 2z) \sin 2z$

(c) $-(\sin z + \cos z)/(\sin 2z)^{1/2}$

(f) $1/\sqrt{z^2 - 3z + 2i}$

72. Si $w = \arcsin(z - 1)$, $z = \operatorname{sh}(3\zeta + 2i)$ et $\zeta = \sqrt{t}$, trouver dw/dt .

Rép. $-3[\operatorname{ch}(3\zeta + 2i)]/2(2z - z^2)^{1/2} t^{1/2}$

73. Si $w = t/\cos(t - 3i)$ et $z = \arcsin(2t - 1)$, calculer dw/dz .

Rép. $\{1 + t \operatorname{tg}(t - 3i)\} (t - t^2)^{1/2} / \cos(t - 3i)$

74. Si $w^2 - 2w + \sin 2z = 0$, trouver (a) dw/dz , (b) d^2w/dz^2 .

Rép. (a) $(\cos 2z)/(1 - w)$, (b) $\{\cos^2 2z - 2(1 - w)^2 \sin 2z\}/(1 - w)^3$

75. Calculer d^2w/dz^2 en $\zeta = 0$ si $w = \cos \zeta$, $z = \operatorname{tg}(\zeta + \pi i)$ Rép. $-\operatorname{ch}^4 \pi$

76. Calculer (a) $\frac{d}{dz}\{z^{\operatorname{Log} z}\}$, (b) $\frac{d}{dz}\{\sin(iz - 2)\}^{\operatorname{arctg}(z + 3i)}$

Rép. (a) $2z^{\operatorname{Log} z - 1} \operatorname{Log} z$

(b) $\{\sin(iz - 2)\}^{\operatorname{arctg}(z + 3i)} \{i \operatorname{arctg}(z + 3i) \cotg(iz - 2) + [\operatorname{Log} \sin(iz - 2)]/[z^2 + 6iz - 8]\}$

77. Trouver les dérivées secondes des expressions suivantes.

(a) $3 \sin^2(2z - 1 + i)$, (b) $\operatorname{Log} \operatorname{tg} z^2$, (c) $\operatorname{sh}(z + 1)^2$, (d) $\operatorname{arc} \cos(\operatorname{Log} z)$, (e) $[\cos \sqrt{1 + z}]^{-1}$

Rép. (a) $24 \cos(4z - 2 + 2i)$ (d) $(1 - \operatorname{Log} z - \operatorname{Log}^2 z)/z^2 (1 - \operatorname{Log}^2 z)^{3/2}$

(b) $4/\sin 2z^2 - 16z^2 \cotg 2z^2/\sin 2z^2$

(e) $-i(1 + 3z)/4(1 + z)^2 z^{3/2}$

(c) $2 \operatorname{ch}(z + 1)^2 + 4(z + 1)^2 \operatorname{sh}(z + 1)^2$

REGLE DE L'HOSPITAL

78. Déterminer (a) $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$, (b) $\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/3}} (z - e^{\pi i/3}) \left(\frac{z}{z^3 + 1} \right)$, (c) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$.

Rép. (a) $(16 + 12i)/25$, (b) $(1 - i\sqrt{3})/6$, (c) $-1/4$

79. Déterminer (a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z^3}$, (b) $\lim_{z \rightarrow m\pi i} (z - m\pi i) \left(\frac{e^z}{\sin z} \right)$. Rép. (a) $1/6$, (b) $e^{m\pi i} / (\operatorname{ch} m\pi)$

80. Trouver $\lim_{z \rightarrow i} \frac{\operatorname{arctg}(z^2 + 1)^2}{\sin^2(z^2 + 1)}$ où la détermination de la fonction arctg est choisie de telle manière que $\operatorname{arctg} 0 = 0$. *Rép.* 1.
81. Déterminer $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^{1/z^2}$. *Rép.* $e^{-1/6}$

POINTS SINGULIERS

82. Déterminer la nature des singularités des fonctions suivantes, situées à distance finie.
- (a) $\frac{z^2 - 3z}{z^2 + 2z + 2}$, (b) $\frac{\operatorname{Log}(z + 3i)}{z^2}$, (c) $\operatorname{arc} \sin(1/z)$, (d) $\sqrt{z(z^2 + 1)}$, (e) $\frac{\cos z}{(z + i)^3}$
- Rép.* (a) $z = -1 \pm i$; pôles simples
 (b) $z = -3i$; point de branchement, $z = 0$; pôle double.
 (c) $z = 0$; point singulier essentiel
 (d) $z = 0, \pm i$; points de branchement
 (e) $z = -i$; pôle triple.
83. Montrer que $f(z) = \frac{(z + 3i)^5}{(z^2 - 2z + 5)^2}$ possède des pôles doubles en $z = 1 \pm 2i$ et un pôle simple à l'infini.
84. Montrer que z^{z^2} a une singularité essentielle à l'infini.
85. Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes ?
- (a) $(z + 3)/(z^2 - 1)$, (b) $1/\sin(1/z^2)$, (c) $(z^2 + 1)/z^{3/2}$.
- Rép.* (a) $z = \pm 1$; pôles simples, $z = \infty$; pôle simple. (b) $z = 1/\sqrt{m\pi}$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ pôles simples, $z = 0$; point singulier essentiel, $z = \infty$; pôle double. (c) $z = 0$ point de branchement, $z = \infty$ point de branchement.

FAMILLES ORTHOGONALES

86. Trouver les trajectoires des familles de courbes suivantes :
- (a) $x^3y - xy^3 = \alpha$, (b) $e^{-x} \cos y + xy = \alpha$.
- Rép.* (a) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \beta$, (b) $2e^{-x} \sin y + x^2 - y^2 = \beta$
87. Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $r^2 \cos 2\theta = \alpha$. *Rép.* $r^2 \sin 2\theta = \beta$
88. Par séparation des parties réelles et imaginaires de $f(z) = z + 1/z$ montrer que la famille $(r^2 + 1) \cos \theta = \alpha r$ est engendrée par les trajectoires orthogonales de $(r^2 - 1) \sin \theta = \beta r$; le vérifier par une autre méthode.
89. Si n est une constante réelle quelconque montrer que les courbes $r^n = \alpha / \cos n\theta$ sont les trajectoires orthogonales des courbes $r^n = \beta / \sin n\theta$.

APPLICATION A LA GEOMETRIE ET A LA MECANIQUE

90. Un point matériel se déplace sur la courbe $z = e^{-t}(2 \sin t + i \cos t)$.
- (a) Déterminer un vecteur tangent unitaire au point $t = \pi/4$.
 (b) Déterminer les modules du vecteur vitesse et du vecteur accélération en $t = 0$ et $t = \pi/2$.
- Rép.* (a) $\pm i$. (b) Vitesse : $\sqrt{5}, \sqrt{5}e^{-\pi/2}$. Accélération : $4, 2e^{-\pi/2}$.
91. Un point matériel décrit la courbe $z = ae^{i\omega t}$. (a) Montrer que sa vitesse est constante et égale à ωa .
 (b) Montrer que le module de son accélération est constant et vaut $\omega^2 a$. (c) Montrer que le vecteur accélération est toujours dirigé vers $z = 0$. (d) Quelle relation y a-t-il entre ce problème et celui d'une pierre tournant à l'extrémité d'une corde dans un plan horizontal ?

92. La position à l'instant t , d'une particule se déplaçant dans le plan des z est donnée par $z = 3te^{-4it}$. Déterminer les modules (a) du vecteur vitesse, (b) du vecteur accélération à $t = 0$ et $t = \pi$.
 Rép. (a) 3, $3\sqrt{1+16\pi^2}$. (b) 24, $24\sqrt{1+4\pi^2}$
93. Un point matériel P décrit la droite $x + y = 2$ du plan des z , à la vitesse constante $3\sqrt{2}$ m/s, du point $z = -5 + 7i$ à $z = 10 - 8i$. Si $w = 2z^2 - 3$ et si P' est l'image de P dans le plan des w , calculer le module (a) du vecteur vitesse, (b) du vecteur accélération de P' après 3 secondes.
 Rép. (a) $24\sqrt{10}$, (b) 72

GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN

94. Si $F = x^2y - xy^2$, calculer (a) ∇F , (b) $\nabla^2 F$. Rép. (a) $(2xy - y^2) + i(x^2 - 2xy)$, (b) $2y - 2x$
95. Soit $B = 3z^2 + 4\bar{z}$. Calculer (a) grad B , (c) rot B , (d) Laplacien de B .
 Rép. (a) 8, (b) $12x$, (c) $12y$, (d) 0
96. Soit C une courbe du plan des xy définie par $x^2 - xy + y^2 = 7$. Déterminer un vecteur unitaire normal à C en le point (a) $(-1, 2)$, (b) (x, y) .
 Rép. (a) $(-4 + 5i)/\sqrt{41}$, (b) $\{2x - y + i(2y - x)\}/\sqrt{5x^2 - 8xy + 5y^2}$
97. Déterminer l'équation de la normale à la courbe $x^2y = 2xy + 6$ en le point $(3, 2)$.
 Rép. $x = 8t + 3$, $y = 3t + 2$.
98. Montrer que $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$. Vérifier le résultat pour $f(z) = z^2 + iz$.
99. Démontrer que $\nabla^2\{FG\} = F\nabla^2G + G\nabla^2F + 2\nabla F \cdot \nabla G$
100. Démontrer que $\text{div grad } A = 0$ si A est imaginaire ou, plus généralement, si $\text{Re } \{A\}$ est harmonique.

PROBLEMES DIVERS

101. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, montrer que :
 (a) $f(z) = 2u(z/2, -iz/2) + \text{constante}$, (b) $f(z) = 2iv(z/2, -iz/2) + \text{constante}$.
102. Utiliser le problème 101 pour déterminer $f(z)$ si (a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, (b) $v(x, y) = \text{sh } x \cos y$.
103. Si V est la vitesse instantanée d'un point matériel se déplaçant sur une courbe plane quelconque C , montrer que la composante normale de l'accélération en tout point de C est V^2/R , où R est le rayon de courbure en ce point.
104. Déterminer une fonction analytique $f(z)$ telle que $\text{Re } \{f'(z)\} = 3x^2 - 4y - 3y^2$ et $f(1 + i) = 0$.
 Rép. $z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i$
105. Montrer que la famille de courbes
$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$
 avec $-a^2 < \lambda < -b^2$ est orthogonale à la famille pour laquelle $\lambda > -b^2 > -a^2$.
106. Montrer que l'équation $F(x, y) = \text{constante}$ peut être mise sous la forme $u(x, y) = \text{constante}$ avec u harmonique, si et seulement si $\frac{\partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2}{(\partial F / \partial x)^2 + (\partial F / \partial y)^2}$ est une fonction de F .
107. Illustrer le résultat du problème précédent en considérant $(y + 2)/(x - 1) = \text{constante}$.
108. Si $f'(z) = 0$ dans un ouvert connexe α , montrer que $f(z)$ est constante dans α .
109. Si $w = f(z)$ est analytique et est exprimée en coordonnées polaires (r, θ) , montrer que

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta} \frac{\partial w}{\partial r}$$

110. Si u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées, montrer que

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

111. Si u et v sont harmoniques dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

est analytique dans $\mathcal{A}$.

112. Montrer que $f(z) = |z|^4$ est dérivable mais non analytique en $z = 0$.

113. Montrer que $\psi = \text{Log}|f(z)|$ est harmonique dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$ si $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{A}$ et si $f(z) f'(z) \neq 0$ dans $\mathcal{A}$.

114. Exprimer les équations de Cauchy-Riemann au moyen des coordonnées (ξ, η) définies par $x = e^\xi \text{ch } \eta$, $y = e^\xi \text{sh } \eta$.

115. Montrer qu'une solution de l'équation différentielle

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

où L, R, C, E_0 et ω sont des constantes, est donnée par

$$Q = \text{Re} \left\{ \frac{E_0 e^{i\omega t}}{i\omega[R + i(\omega L - 1/\omega C)]} \right\}$$

Cette équation apparaît dans la théorie des courants alternatifs en électricité.

[On pourra remplacer le second membre par $E_0 e^{i\omega t}$ et chercher une solution de la forme $A e^{i\omega t}$ où A est à déterminer]

116. Montrer que $\nabla^2 \{f(z)\}^n = n^2 |f(z)|^{n-2} |f'(z)|^2$, moyennant des restrictions convenables sur $f(z)$.

117. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{8}{x^2 + y^2}$.

$$\text{Rép. } U = \frac{1}{2} \{\text{Log}(x^2 + y^2)\}^2 + 2 \{\text{arctg}(y/x)\}^2 + F(x + iy) + G(x - iy)$$

118. Démontrer que $\nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U) = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$.

119. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 36(x^2 + y^2)$.

$$\text{Rép. } U = \frac{1}{16}(x^2 + y^2)^3 + (x + iy) F_1(x - iy) + G_1(x - iy) + (x - iy) F_2(x + iy) + G_2(x + iy)$$

Intégration dans le domaine complexe

Théorème de Cauchy

INTEGRALE CURVILIGNE COMPLEXE

Soit $f(z)$ une fonction continue en tout point d'une courbe C [Fig. 4-1] dont nous supposons la longueur finie, i.e. C sera supposée rectifiable.

Partageons C en n intervalles au moyen des points $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, arbitrairement choisis et posons $a = z_0, l = z_n$. Sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k [où k varie de 1 à n] choisissons un point ξ_k . Formons la somme

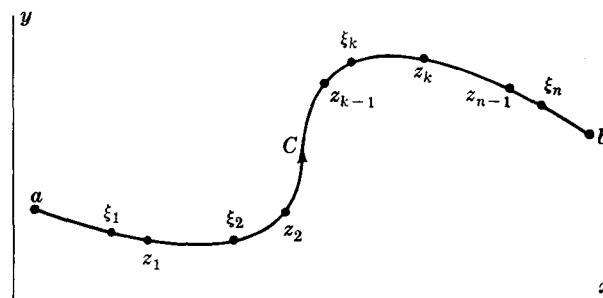


Fig. 4-1

$$S_n = f(\xi_1)(z_1 - a) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\xi_n)(b - z_{n-1}) \quad (1)$$

En posant

$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, ceci devient

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (2)$$

Si l'on fait croître le nombre n des subdivisions de façon que la longueur $|\Delta z_k|$ de la plus grande des cordes tende vers zéro, alors la somme S_n tend vers une limite indépendante du mode de subdivision et nous désignerons cette limite par

$$\int_a^b f(z) dz \quad \text{ou} \quad \int_C f(z) dz \quad (3)$$

appelée intégrale curviligne complexe ou plus simplement intégrale curviligne de $f(z)$ le long de C , ou encore intégrale de $f(z)$ entre a et b , le long de C . Dans un tel cas $f(z)$ est dite intégrale le long de C . On notera que si $f(z)$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$ et si C est une courbe appartenant à $\mathcal{A}$ alors $f(z)$ est certainement intégrable le long de C .

INTEGRALES CURVILIGNES REELLES

Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions réelles de x et y , continues en tous les points d'une courbe C , l'intégrale curviligne de $P dx + Q dy$ le long de C peut être définie d'une manière semblable à celle indiquée ci-dessus et est notée

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad \text{ou} \quad \int_C P dx + Q dy \quad (4)$$

la deuxième notation étant utilisée par abréviation. Si C est continûment différentiable et a pour représentation paramétrique $x = \phi(t), y = \psi(t)$ ou $t_1 \leq t \leq t_2$, la valeur de (4) est donnée par

$$\int_{t_1}^{t_2} [P\{\phi(t), \psi(t)\} \phi'(t) dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\} \psi'(t) dt]$$

On peut adapter le résultat au cas où C est continûment différentiable par morceaux (voir Problème 1).

RELATION ENTRE INTEGRALES CURVILIGNES REELLES ET COMPLEXES

Si $f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = u + i v$ l'intégrale curviligne complexe (3) peut être exprimée au moyen d'intégrales curvilignes réelles de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + i v)(dx + i dy) \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \end{aligned} \quad (5)$$

Pour cette raison (5) est souvent prise comme définition de l'intégrale curviligne complexe.

PROPRIETES DES INTEGRALES

Si $f(z)$ et $g(z)$ sont intégrables le long de C , alors

1. $\int_C \{f(z) + g(z)\} dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$
2. $\int_C A f(z) dz = A \int_C f(z) dz$ où A est une constante quelconque
3. $\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$
4. $\int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z) dz + \int_m^b f(z) dz$ où les points a, b, m appartiennent à C .
5. $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$

où $|f(z)| \leq M$, i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C , et L désigne la longueur de C .

On peut écrire ces propriétés de plusieurs autres façons. Par exemple si T, U et V sont des points consécutifs sur une courbe, la propriété 3 peut s'écrire sous la forme

$$\int_{TUV} f(z) dz = - \int_{VUT} f(z) dz.$$

De même si C, C_1 et C_2 représentent des courbes joignant a à b , a à m et m à b respectivement, il est naturel de considérer $C = C_1 + C_2$ et d'écrire la propriété 4 sous la forme

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

CHANGEMENTS DE VARIABLES

Soit $z = g(\xi)$ une fonction continûment dérivable de la variable complexe $\xi = u + i v$. Supposons qu'une courbe C du plan de la variable z soit la transformée par g d'une courbe C' du plan de la variable ξ , alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{C'} f\{g(\xi)\} g'(\xi) d\xi \quad (6)$$

Ces conditions sont certainement satisfaites si g est analytique dans un ouvert connexe contenant C' .

OUVERTS SIMPLEMENT OU MULTIPLEMENT CONNEXES

Un ouvert connexe $\mathcal{R}$ est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple [Page 68] de $\mathcal{R}$ peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter $\mathcal{R}$, i.e. est homotope à un point. Dans le cas contraire $\mathcal{R}$ est dit simplement connexe.

Par exemple considérons l'ouvert connexe $\mathcal{R}$ défini par $|z| < 2$, représenté dans la figure 4.2 par la région ombrée. Si Γ est une courbe fermée simple de $\mathcal{R}$ [i.e. dont tous les points appartiennent à $\mathcal{R}$] nous voyons qu'elle peut être réduite par déformation, sans quitter $\mathcal{R}$, à un point de $\mathcal{R}$; $\mathcal{R}$ est donc simplement connexe. Par contre si $\mathcal{R}$ est l'ouvert connexe défini par $1 < |z| < 2$, ombré dans la figure 4.3, alors il existe des courbes Γ de $\mathcal{R}$ irréductibles à un point sans quitter $\mathcal{R}$ qui est donc multiplément connexe.

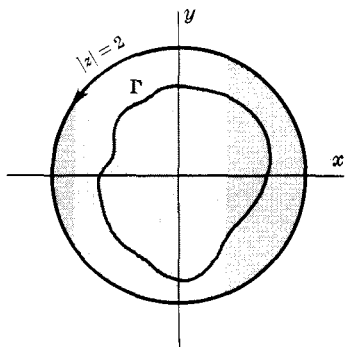


Fig. 4-2

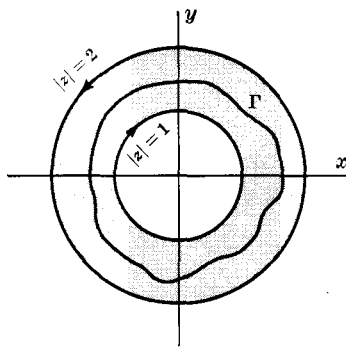


Fig. 4-3

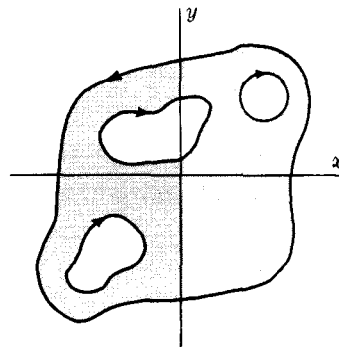


Fig. 4-4

Intuitivement, un ouvert simplement connexe est "sans trou" cependant qu'un ouvert multiplément connexe en possède.

COURBE DE JORDAN

Toute courbe fermée continue sans point double, de longueur finie ou infinie, est appelée une courbe de Jordan [Voir problème 30]. Un théorème important qui, bien que difficile à démontrer, semble intuitivement évident, est le suivant :

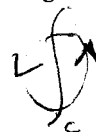
Théorème de Jordan. Une courbe de Jordan partage le plan en deux ouverts connexes ayant la courbe considérée comme frontière commune. L'ouvert connexe qui est borné [i.e. tel que tous ses points satisfont à $|z| < M$ où M est une constante positive] est appelé l'intérieur de la courbe, cependant que l'autre ouvert est appelé l'extérieur de la courbe.

Il suit de cela que l'intérieur d'une courbe fermée simple est un ouvert simplement connexe dont la frontière est la courbe elle-même.

CONVENTIONS D'ORIENTATION D'UN CONTOUR FERME

On dit que la frontière d'un ouvert connexe est décrite dans le sens direct si un observateur se déplaçant dans ce sens sur la courbe [et étant perpendiculaire au plan] a l'ouvert considéré à sa gauche. Cette convention est traduite par les flèches indiquées dans les figures 4.2, 4.3 et 4.4. On utilise le symbole

$$\oint_C f(z) dz$$



pour noter l'intégration de $f(z)$ le long de C dans le sens direct. On notera que dans le cas d'un cercle [Fig. 4.2] le sens direct est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

FORMULE DE GREEN

Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des fonctions continues et à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et sur sa frontière C . La formule de Green établit que

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (7)$$

Cette formule est à la fois vraie pour des ouverts simplement connexes ou multiplement connexes.

FORME COMPLEXE DE LA FORMULE DE GREEN

Soit $F(z, \bar{z})$ une fonction continue, à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et sur sa frontière C , et soit $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ des coordonnées complexes conjuguées. La formule de Green peut être écrite sous la forme complexe suivante

$$\oint_C F(z, \bar{z}) dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA \quad (8)$$

où dA représente l'élément d'aire $dx dy$.

Pour une généralisation de (8) on pourra se reporter au problème 56.

THEOREME DE CAUCHY. THEOREME DE CAUCHY-GOURSAT

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et sur sa frontière C . Alors

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (9)$$

Ce théorème fondamental est souvent appelé théorème de Cauchy, il est à la fois valable pour des ouverts simplement connexes ou multiplement connexes. Il fut d'abord démontré à l'aide de la formule de Green avec l'hypothèse supplémentaire de la continuité de $f'(z)$ dans $\mathcal{R}$ [voir problème 11]. Cependant, Goursat en donna une démonstration qui évitait cette restriction, c'est pourquoi on l'appelle quelquefois théorème de Cauchy-Goursat quand on désire mettre l'accent sur cette absence de restriction.

THEOREME DE MORERA

Soit $f(z)$ une fonction continue dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$, supposons que

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (10)$$

pour toute courbe fermée simple de $\mathcal{R}$. Alors $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

Ce théorème dû à Morera est souvent appelé la réciproque du théorème de Cauchy. Il peut être étendu aux ouverts multiplement connexes. Pour une démonstration qui suppose que de plus $f'(z)$ est continue dans $\mathcal{R}$, on se reportera au problème 22. Pour une démonstration qui n'utilise pas cette hypothèse supplémentaire on verra le problème 7, chapitre 5.

INTEGRALES INDEFINIES

Si $f(z)$ et $F(z)$ sont analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et telles que $F'(z) = f(z)$, alors $F(z)$ est appelée intégrale indéfinie ou anti-dérivée de $f(z)$ et est notée

$$F(z) = \int f(z) dz \quad (11)$$

La dérivée d'une constante étant nulle, on en déduit que deux intégrales définies d'une même fonction peuvent différer d'une constante. Pour cette raison une constante arbitraire C est souvent ajoutée à la droite de (11).

Exemple : De $\frac{d}{dz}(3z^2 - 4 \sin z) = 6z - 4 \cos z$, on tire

$$\int (6z - 4 \cos z) dz = 3z^2 - 4 \sin z + C$$

INTEGRALES DE FONCTIONS PARTICULIERES

A partir des résultats de la page 66 [ou par dérivation directe] on peut obtenir les résultats suivants (dans lesquels on n'a pas indiqué de constantes d'intégration).

1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$
2. $\int \frac{dz}{z} = \text{Log } z$
3. $\int e^z dz = e^z$
4. $\int a^z dz = \frac{a^z}{\text{Log } a}$
5. $\int \sin z dz = -\cos z$
6. $\int \cos z dz = \sin z$
7. $\int \text{tg } z dz = -\text{Log } \cos z$
8. $\int \text{cotg } z dz = \text{Log } \sin z$
9. $\int \frac{dz}{\cos z} = \text{Log} \left[\frac{1}{\cos z} + \text{tg } z \right]$
 $= \text{Log } \text{tg} (z/2 + \pi/4)$
10. $\int \frac{dz}{\sin z} = \text{Log} \left(\frac{1}{\sin z} - \text{cotg } z \right)$
 $= \log \text{tg} (z/2)$
11. $\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \text{tg } z$
12. $\int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\text{cotg } z$
13. $\int \frac{\text{tg } z}{\cos z} dz = \frac{1}{\cos z}$
14. $\int \frac{\text{cotg } z}{\sin z} dz = -\frac{1}{\sin z}$
15. $\int \text{sh } z dz = \text{ch } z$
16. $\int \text{ch } z dz = \text{sh } z$
17. $\int \text{th } z dz = \text{Log } \text{ch } z$
18. $\int \coth z = \text{Log } \text{sh } z$
19. $\int \frac{dz}{\text{ch } z} = \text{Arctg } \text{sh } z$
20. $\int \frac{dz}{\text{sh } z} = -\text{Arg } \coth (\text{ch } z)$
21. $\int \frac{dz}{\text{ch}^2 z} = \text{th } z$
22. $\int \frac{dz}{\text{sh}^2 z} = -\coth z$
23. $\int \frac{\text{th } z}{\text{ch } z} dz = -\frac{1}{\text{ch } z}$
24. $\int \frac{\coth z}{\text{sh } z} dz = \frac{-1}{\text{sh } z}$
25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \text{Log}(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$
26. $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctg } \frac{z}{a} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{a} \text{Arc cotg } \frac{z}{a}$
27. $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \text{Log} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)$
28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{a} \quad \text{ou} \quad -\arccos \frac{z}{a}$
29. $\int \frac{dz}{z \sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a} \text{Log} \left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}} \right)$
30. $\int \frac{dz}{z \sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{z}$
31. $\int \sqrt{z^2 \pm a^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{z^2 \pm a^2}$
 $\pm \frac{a^2}{2} \text{Log}(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$
32. $\int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{z}{2} \sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{z} \arcsin \frac{z}{a}$
33. $\int e^{az} \sin bz dz = \frac{e^{az}(a \sin bz - b \cos bz)}{a^2 + b^2}$
34. $\int e^{az} \cos bz dz = \frac{e^{az}(a \cos bz + b \sin bz)}{a^2 + b^2}$

QUELQUES CONSEQUENCES DU THEOREME DE CAUCHY

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$. On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1. Si a et z sont deux points quelconques de $\mathcal{R}$, alors

$$\int_a^z f(z) dz$$

est indépendant du chemin suivi pour aller de a à z .

Théorème 2. Si a et z sont deux points quelconques de $\mathcal{R}$ et si

$$G(z) = \int_a^z f(z) dz \quad (12)$$

alors $G(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$ et $G'(z) = f(z)$.

Il peut y avoir confusion entre la variable d'intégration z de (12) et la borne supérieure de l'intégrale. En fait comme une intégrale définie ne dépend que de la courbe et des bornes d'intégration, tout autre symbole peut être utilisé pour la variable d'intégration, pour cette raison nous dirons que c'est une variable muette. Ainsi (12) peut être écrit de façon équivalente

$$G(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

Théorème 3. Si a et b sont deux points quelconques de $\mathcal{R}$ et si $F'(z) = f(z)$, alors

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a) \quad (14)$$

Ceci peut aussi être écrit sous la forme habituelle de l'analyse élémentaire

$$\int_a^b F'(z) dz = F(z) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (15)$$

Exemple : $\int_{3i}^{1-i} 4z dz = 2z^2 \Big|_{3i}^{1-i} = 2(1-i)^2 - 2(3i)^2 = 18 - 4i$

Théorème 4. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe limité par deux courbes fermées simples C et C_1 [où C_1 est à l'intérieur de C comme dans la figure 4.5 ci-dessous] et sur ces courbes. Alors

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz \quad (16)$$

où C_1 et C_2 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur [voir figure 4.5].

Ce résultat montre que si nous désirons intégrer $f(z)$ le long d'une courbe C_1 nous pouvons remplacer C par toute courbe C_1 , pourvu que $f(z)$ soit analytique dans l'ouvert connexe compris entre C et C_1 .

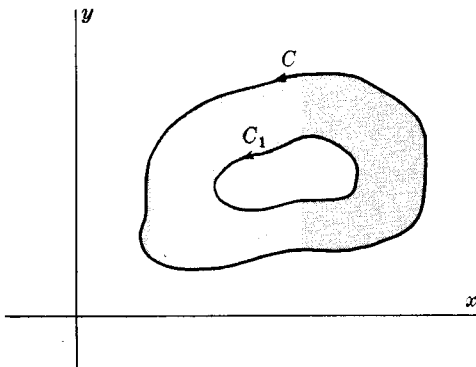


Fig. 4-5

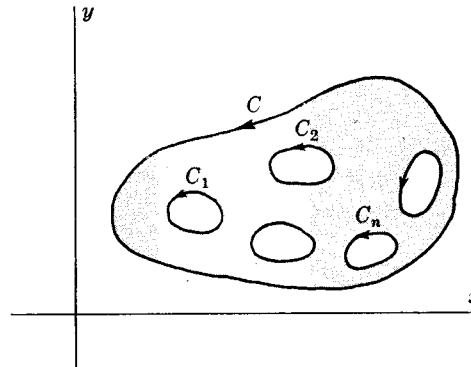


Fig. 4-6

Théorème 5. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe limité par les courbes fermées simples ne se chevauchant pas $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ [où $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont intérieures à C comme dans la figure 4.6 ci-dessus] et sur ces courbes. Alors

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz \quad (17)$$

C'est une généralisation du théorème 4.

Problèmes résolus

INTEGRALES CURVILIGNES

1. Calculer $\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2) dx + (3x - y) dy$ le long de (a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$;

(b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0, 3)$ à $(2, 3)$ et $(2, 3)$ à $(2, 4)$; (c) le segment de droite d'extrémités $(0, 3)$ et $(2, 4)$.

(a) Les points $(0, 3)$ et $(2, 4)$ de la parabole correspondent respectivement à $t = 0$ et $t = 1$. L'intégrale donnée a alors pour valeur

$$\int_{t=0}^1 \{2(t^2 + 3) + (2t)^2\} 2 dt + \{3(2t) - (t^2 + 3)\} 2t dt = \int_0^1 (24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t) dt = 33/2$$

(b) Le long du segment de droite d'extrémités $(0, 3)$ et $(2, 3)$, $y = 3$, $dy = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{x=0}^2 (6 + x^2) dx + (3x - 3)0 = \int_{x=0}^2 (6 + x^2) dx = 44/3$$

Le long du segment de droite d'extrémités $(2, 3)$ et $(2, 4)$, $x = 2$, $dx = 0$ et l'intégrale curviligne vaut

$$\int_{y=3}^4 (2y + 4)0 + (6 - y) dy = \int_{y=3}^4 (6 - y) dy = 5/2$$

Le résultat demandé est donc $= 44/3 + 5/2 = 103/6$.

(c) Une équation de la droite joignant $(0, 3)$ à $(2, 4)$ est $2y - x = 6$. On en tire $x = 2y - 6$. D'où la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{y=3}^4 \{2y + (2y - 6)^2\} 2 dy + \{3(2y - 6) - y\} dy = \int_3^4 (8y^2 - 39y + 54) dy = 97/6$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant $y = \frac{1}{2}(x + 6)$.

2. Evaluer $\int_C \bar{z} dz$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$ le long de la courbe C (a) définie par $z = t^2 + it$,

(b) formée des segments joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4 + 2i$.

(a) Les points $z = 0$ et $z = 4 + 2i$ sur C correspondant à $t = 0$ et à $t = 2$. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=0}^2 (\overline{t^2 + it}) d(t^2 + it) = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i) dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t) dt = 10 - 8i/3$$

Autre méthode. L'intégrale donnée s'écrit

$$\int_C (x - iy)(dx + i dy) = \int_C x dx + y dy + i \int_C x dy - y dx$$

Les équations paramétriques de C sont $x = t^2$, $y = t$ de $t = 0$ à $t = 2$; l'intégrale curviligne a donc pour valeur

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^2 (t^2)(2t dt) + (t)(dt) + i \int_{t=0}^2 (t^2)(dt) - (t)(2t dt) \\ = \int_0^2 (2t^3 + t) dt + i \int_0^2 (-t^2) dt = 10 - 8i/3 \end{aligned}$$

(b) L'intégrale donnée vaut

$$\int_C (x - iy)(dx + i dy) = \int_C x dx + y dy + i \int_C x dy - y dx$$

La droite qui joint 0 à $2i$ joint les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$, on a donc sur cette droite $x = 0$, $dx = 0$ et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{y=0}^2 (0)(0) + y dy + i \int_{y=0}^2 (0)(dy) - y(0) = \int_{y=0}^2 y dy = 2$$

Sur le segment de droite $2i, 4 + 2i$ on a $y = 2, dy = 0$ d'où

$$\int_{x=0}^4 x dx + 2 \cdot 0 + i \int_{x=0}^4 x \cdot 0 - 2 dx = \int_0^4 x dx + i \int_0^4 -2 dx = 8 - 8i$$

Et le résultat demandé est $= 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

3. Montrer que si $f(z)$ est intégrable le long d'une courbe C de longueur finie L , et s'il existe un nombre positif M tel que $|f(z)| \leq M$ sur C , alors

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

Par définition nous avons en utilisant les notations de la page 92

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (1)$$

D'autre part

$$\left. \begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \\ &\leq ML \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où nous avons utilisé le fait que $|f(z)| \leq M$ pour tous les points z de C et que $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ représente la somme des longueurs des cordes joignant les points z_{k-1} et z_k (où $k = 1, 2, \dots, n$) cette somme étant inférieure ou égale à la longueur de C .

On obtient alors le résultat demandé en prenant la limite des deux membres de (2) et en tenant compte de (1).

On peut montrer plus généralement que

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

FORMULE DE GREEN

4. Démontrer la formule de Green pour une courbe fermée simple C ayant la propriété d'être rencontrée par des parallèles aux axes de coordonnées en deux points au plus.

On suppose que les équations des arcs EGF et EHF (voir figure 4.7) sont respectivement $y = Y_1(x)$ et $y = Y_2(x)$. Si $\mathcal{R}$ désigne l'intérieur de C , nous avons

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{x=e}^f \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_{x=e}^f P(x, y) \Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx = \int_e^f [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)] dx \\ &= - \int_e^f P(x, Y_1) dx - \int_f^e P(x, Y_2) dx = - \oint_C P dx \end{aligned}$$

d'où

$$\oint_C P dx = - \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1)$$

De la même façon si $x = X_1(y)$ et $x = X_2(y)$ sont respectivement les équations des arcs GEH et GFH , on a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{y=g}^h \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_g^h [Q(X_2, y) - Q(X_1, y)] dy \\ &= \int_h^g Q(X_1, y) dy + \int_g^h Q(X_2, y) dy = \oint_C Q dy \end{aligned}$$

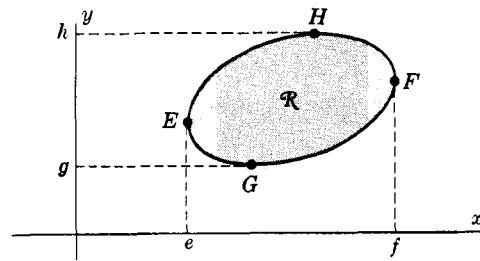


Fig. 4-7

D'où
$$\oint_C Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (2)$$

Par addition de (1) et (2) on obtient alors
$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

5. Vérifier la formule de Green pour l'intégrale

$$\oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$$

où C est la frontière du domaine compris entre les courbes $y = x^2$ et $y^2 = x$.

Les courbes $y = x^2$ et $y^2 = x$ se coupent en $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
Le sens direct sur C est indiqué à la figure 4.8.

Sur $y = x^2$, l'intégrale curviligne a pour valeur

$$\int_{x=0}^1 \{2x(x^2) - x^2\} dx + \{x + (x^2)^2\} d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx = 7/6$$

Sur $y^2 = x$, l'intégrale curviligne a pour valeur

$$\int_{y=1}^0 \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\} d(y^2) + \{y^2 + y^2\} dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy = -17/15$$

D'où la valeur de l'intégrale considérée $= 7/6 - 17/15 = 1/30$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (2xy - x^2) \right\} dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx = 1/30 \end{aligned}$$

La formule de Green est donc bien vérifiée.

6. Étendre la démonstration de la formule de Green donnée au problème 4 au cas de courbe C rencontrées par des parallèles aux axes de coordonnées en plus de deux points.

On considère une courbe fermée simple C , telle que celle représentée à la figure 4.9, rencontrée en plus de deux points par des parallèles aux axes de coordonnées. Le segment de droite ST partage l'intérieur de la courbe en deux régions $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui sont du type considéré au problème 4 et pour lesquelles la formule de Green s'applique, i.e.

$$(1) \int_{STUS} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2) \int_{SVTS} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Par addition des premiers membres de (1) et (2) et en omettant les quantités $P dx + Q dy$, nous avons

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT}$$

à l'aide de
$$\int_{ST} = - \int_{TS}$$

De la même façon par addition des seconds membres de (1) et (2)

$$\iint_{\mathcal{R}_1} + \iint_{\mathcal{R}_2} = \iint_{\mathcal{R}}$$

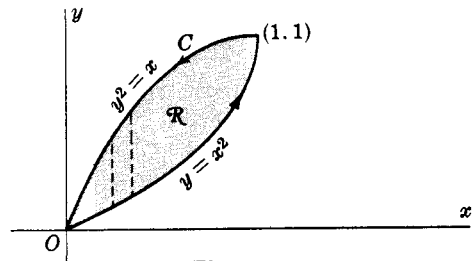


Fig. 4-8

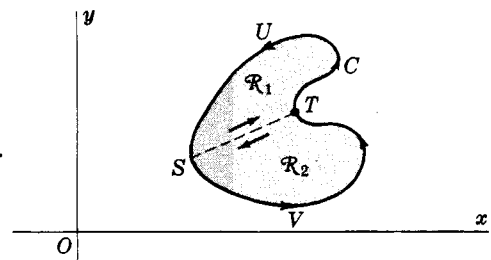


Fig. 4-9

$$\text{D'où} \quad \int_{TUSVT} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

ce qui démontre le théorème. Nous avons démontré la formule de Green pour l'ouvert simplement connexe de la figure 4.9 limité par la courbe fermée simple C . Dans le cas de domaines plus compliqués, il est nécessaire d'utiliser un plus grand nombre de droites telles que ST pour démontrer cette formule.

La formule de Green est également valable dans le cas de domaine multiplement connexe ainsi que le montre le problème 7.

7. Montrer que la formule de Green est également vraie pour un ouvert multiplement connexe $\mathcal{R}$ tel que celui représenté à la figure 4.10.

La frontière de $\mathcal{R}$, formée de la frontière extérieure $AHJKLA$ et de la frontière intérieure $DEFGD$, est décrite dans le sens direct de telle façon qu'un observateur se déplaçant dans ce sens voit l'intérieur du domaine $\mathcal{R}$ à sa gauche. On voit que le sens positif est celui qui est indiqué sur la figure.

Pour établir ce théorème construisons une ligne telle que AD reliant les frontières extérieure et intérieure. L'ouvert dans la frontière $ADEFGDALKJHA$ est simplement connexe et on peut donc lui appliquer la formule de Green. Donc

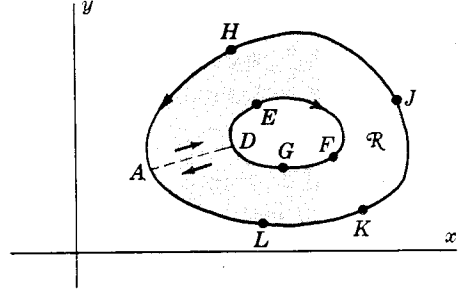


Fig. 4-10

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Mais l'intégrale qui figure dans le membre de gauche peut s'écrire en abrégé

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

puisque $\int_{AD} = -\int_{DA}$. Donc si C_1 désigne la courbe $ALKJHA$, C_2 la courbe $DEFGD$ et C la frontière de $\mathcal{R}$ constituée par C_1 et C_2 (décrites dans le sens positif par rapport à $\mathcal{R}$) alors $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \oint_C$ et donc

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

8. Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des fonctions continues et à dérivées partielles premières continues en tout point d'un ouvert $\mathcal{R}$ simplement connexe. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\oint_C P dx + Q dy = 0$ pour tout contour fermé C de $\mathcal{R}$ est que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ identiquement dans $\mathcal{R}$.

Condition suffisante. On suppose que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. On a donc par la formule de Green

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

où $\mathcal{R}$ est l'ouvert limité par C .

Condition nécessaire.

On suppose que $\oint_C P dx + Q dy = 0$ sur tout contour fermé C de $\mathcal{R}$ et que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en un point de $\mathcal{R}$. Plus précisément supposons que $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$ au point (x_0, y_0) .

Par hypothèse $\partial P/\partial y$ et $\partial Q/\partial x$ sont continues dans $\mathcal{R}$ si bien qu'il existe un ouvert connexe τ ayant (x_0, y_0) pour point intérieur et tel que $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$. Si Γ est la frontière de τ , alors par la formule de Green

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\tau} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $\oint_C P dx + Q dy = 0$ pour toute courbe fermée de $\mathcal{R}$. Donc $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ ne peut être positif.

De la même façon nous pouvons démontrer que $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ ne peut être négatif ; on en déduit que cette expression doit être identiquement nulle, i.e. $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ identiquement dans $\mathcal{R}$.

Les résultats peuvent être étendus au cas de domaines multiplement connexes.

9. Soit P et Q les fonctions du problème 8. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_A^B P dx + Q dy$ soit indépendante du chemin de $\mathcal{R}$ joignant A à B est que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ identiquement dans $\mathcal{R}$.

Condition suffisante. Si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, alors d'après le problème 8.

$$\int_{ADBEA} P dx + Q dy = 0$$

[voir figure 4.11]. On tire de là en omettant les quantités $P dx + Q dy$,

$$\int_{ADB} + \int_{BEA} = 0, \quad \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB} \quad \text{et donc} \quad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

i.e. l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi.

Condition nécessaire.

Si l'intégrale est indépendante du chemin suivi, alors pour tous les arcs C_1 et C_2 de $\mathcal{R}$

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}, \quad \int_{ADB} = \int_{AEB} \quad \text{et} \quad \int_{ADBEA} = 0$$

On déduit de cela que l'intégrale curviligne le long de tout contour fermé de $\mathcal{R}$ est nulle, et donc d'après le problème 8, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Les résultats peuvent être étendus au cas de domaines multiplement connexes.

FORME COMPLEXE DE LA FORMULE DE GREEN

10. Si $B(z, \bar{z})$ est continue et possède des dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et sur sa frontière C (où $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$) montrer que la formule de Green peut être écrite sous la forme complexe suivante

$$\oint_C B(z, \bar{z}) dz = 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dx dy$$

Soit $B(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y)$. A l'aide de la formule de Green nous avons

$$\begin{aligned} \oint_C B(z, \bar{z}) dz &= \oint_C (P + iQ)(dx + i dy) = \oint_C P dx - Q dy + i \oint_C Q dx + P dy \\ &= - \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \\ &= i \iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] dx dy \\ &= 2i \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} dx dy \end{aligned}$$

d'après le problème 34 page 83. Le résultat peut aussi s'écrire en utilisant $\text{rot } B$ [voir page 70].

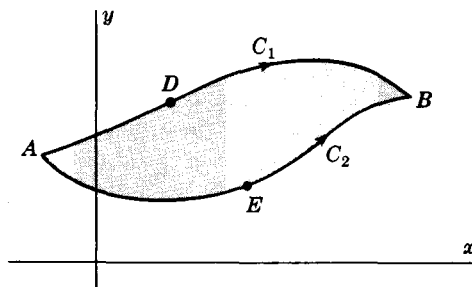


Fig. 4-11

THEOREME DE CAUCHY ET THEOREME DE CAUCHY-GOURSAT

11. Démontrer le théorème de Cauchy $\oint_C f(z) dz = 0$ si $f(z)$ désigne une fonction analytique à dérivée $f'(z)$ continue à l'intérieur d'une courbe C et sur cette courbe.

La fonction $f(z) = u + iv$ étant analytique et ayant une dérivée continue

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

on en déduit que les dérivées partielles (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, (2) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ sont continues dans C et sur C . On peut donc appliquer la formule de Green et

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u + iv)(dx + i dy) = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

à l'aide des équations de Cauchy-Riemann (1) et (2).

En utilisant le fait que la formule de Green est applicable à des ouverts multiplement connexes, nous pouvons étendre ce résultat à des ouverts multiplement connexes, $f(z)$ remplissant les conditions données plus haut.

Le théorème de Cauchy-Goursat [voir les problèmes 13-16] n'utilise pas l'hypothèse supplémentaire de la continuité de $f'(z)$.

Autre méthode.

Le résultat peut être déduit de la forme complexe de la formule de Green [Problème 10] en remarquant que si $B(z, \bar{z})$ est indépendant de $\bar{z}$, alors $\partial B / \partial \bar{z} = 0$ et donc $\oint_C f(z) dz = 0$.

12. Démontrer que (a) $\oint_C dz = 0$, (b) $\oint_C z dz = 0$, (c) $\oint_C (z - z_0) dz = 0$ où C est une courbe fermée simple et z_0 une constante.

Ce sont des conséquences du théorème de Cauchy car les fonctions 1, z et $z - z_0$ sont analytiques dans C et ont des dérivées continues.

Ces résultats peuvent aussi être établis directement à partir de la définition de l'intégrale [voir problème 90].

13. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat dans le cas d'un triangle.

On considère un triangle quelconque Δ tel que ABC dans la figure 4.12, situé dans le plan de la variable z . On joint les milieux respectifs D , E et F de AB , AC et BC et l'on forme ainsi quatre triangles notés Δ_I , Δ_{II} , Δ_{III} et Δ_{IV} .

Si $f(z)$ est analytique dans le triangle ABC et sur sa frontière nous avons en omettant la quantité intégrée dans le second membre

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} f(z) dz &= \int_{DAE} + \int_{EBF} + \int_{FCD} \\ &= \left\{ \int_{DAE} + \int_{ED} \right\} + \left\{ \int_{EBF} + \int_{FE} \right\} + \left\{ \int_{FCD} + \int_{DF} \right\} + \left\{ \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FD} \right\} \\ &= \int_{DAED} + \int_{EBFE} + \int_{FCDF} + \int_{DEFD} \\ &= \oint_{\Delta_I} f(z) dz + \oint_{\Delta_{II}} f(z) dz + \oint_{\Delta_{III}} f(z) dz + \oint_{\Delta_{IV}} f(z) dz \end{aligned}$$

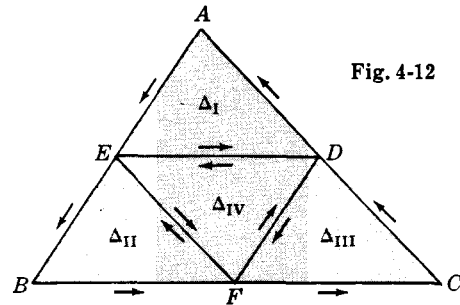


Fig. 4-12

où à la deuxième ligne nous avons utilisé le fait que

$$\int_{ED} = -\int_{DE}, \quad \int_{FE} = -\int_{EF}, \quad \int_{DF} = -\int_{FD}$$

D'où

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \left| \oint_{\Delta_I} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{II}} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{III}} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{IV}} f(z) dz \right| \quad (1)$$

Soit Δ_1 le triangle correspondant au terme du premier membre de (1) qui a la plus grande valeur (s'il y en a deux ou plus alors Δ_1 est n'importe lequel d'entre eux). On a donc

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_1} f(z) dz \right| \quad (2)$$

En joignant les milieux des côtés de Δ_1 on obtient de la même façon un triangle Δ_2 tel que

$$\left| \oint_{\Delta_1} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_2} f(z) dz \right| \quad (3)$$

si bien que

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \oint_{\Delta_2} f(z) dz \right| \quad (4)$$

Après n opérations semblables on obtient un triangle Δ_n tel que

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{\Delta_n} f(z) dz \right| \quad (5)$$

Ainsi $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$, est une suite de triangles, chacun d'entre eux étant contenu dans le précédent (i.e. une suite de triangles emboîtés) et il existe un point z_0 qui appartient à chaque triangle de la suite.

Du fait que z_0 est situé à l'intérieur ou sur la frontière de Δ on déduit que $f(z)$ est analytique en z_0 . D'où d'après le problème 21, page 78,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0) \quad (6)$$

où pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver δ tel que $|\eta| < \epsilon$, pourvu que $|z - z_0| < \delta$.

On a donc par intégration des deux membres de (6) et en utilisant le problème 12

$$\oint_{\Delta_n} f(z) dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0) dz \quad (7)$$

D'autre part si P désigne la périmètre de Δ , celui de Δ_n est $P_n = P/2^n$. Si z est un point quelconque de Δ_n , on a alors comme on le voit sur la figure 4-13 $|z - z_0| < P/2^n < \delta$. D'où d'après (7) et la propriété 5, page 93

$$\left| \oint_{\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0) dz \right| \leq \epsilon \cdot \frac{P}{2^n} \cdot \frac{P}{2^n} = \frac{\epsilon P^2}{4^n}$$

L'égalité (5) devient alors

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \frac{\epsilon P^2}{4^n} = \epsilon P^2$$

La quantité ϵ pouvant être choisie arbitrairement petite on en déduit le résultat demandé :

$$\oint_{\Delta} f(z) dz = 0$$

14. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour tout contour polygonal fermé.

En construisant les droites BF , CF et DF on partage le polygone en triangles. Alors par le théorème de Cauchy pour les triangles [problème 13] et le fait que les intégrales le long de BF et FB , CF et FC , DF et FD s'annulent, on obtient le résultat demandé :

$$\begin{aligned} \int_{ABCDEFA} f(z) dz &= \int_{ABFA} f(z) dz + \int_{BCFB} f(z) dz \\ &+ \int_{CDFC} f(z) dz + \int_{DEFD} f(z) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

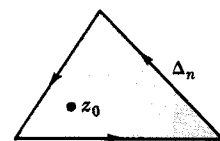


Fig. 4-13

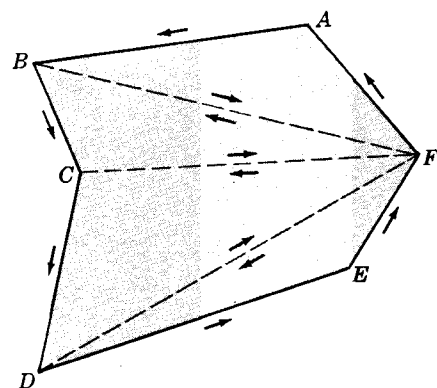


Fig. 4-14

où l'on suppose que $f(z)$ est analytique dans et sur le polygone.

On remarquera que nous avons démontré le résultat pour des polygones simples dont les côtés ne se coupent pas. Une démonstration peut aussi être donnée pour des polygones dont les côtés se coupent (voir problème 66).

15. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour toute courbe fermée simple.

Supposons que C est située à l'intérieur d'un ouvert connexe $\mathcal{K}$ dans lequel $f(z)$ est analytique.

Choisissons n points de subdivision $z_1, z_2, \dots, z_n$ sur la courbe C [Fig. 4-15] et posons pour simplifier les notations $z_0 = z_n$. Construisons le polygone P obtenu en joignant ces points.

On définit alors la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k$$

où $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Par définition

$$\lim S_n = \oint_C f(z) dz$$

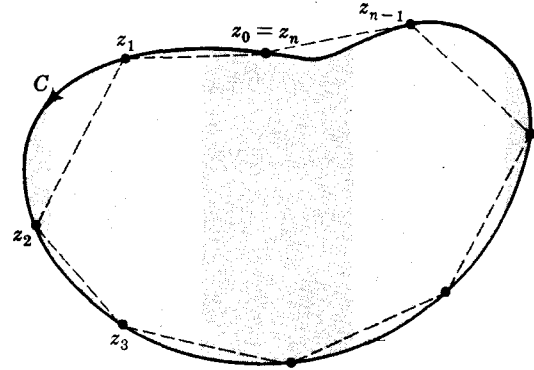


Fig. 4-15

[où la limite du premier membre est à prendre pour $n \rightarrow \infty$ de telle façon que le plus grand des $|\Delta z_k| \rightarrow 0$], on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver N tel que si $n > N$

$$\left| \oint_C f(z) dz - S_n \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (1)$$

Considérons maintenant l'intégrale prise le long du polygone P . Elle est nulle d'après le problème 14, nous avons donc

$$\begin{aligned} \oint_P f(z) dz &= 0 = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z) dz \\ &= \int_{z_0}^{z_1} \{f(z) - f(z_1) + f(z_1)\} dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z) - f(z_n) + f(z_n)\} dz \\ &= \int_{z_0}^{z_1} \{f(z) - f(z_1)\} dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z) - f(z_n)\} dz + S_n \end{aligned}$$

si bien que

$$S_n = \int_{z_0}^{z_1} \{f(z_1) - f(z)\} dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z_n) - f(z)\} dz \quad (2)$$

Choisissons N suffisamment grand pour que sur les segments de droites joignant z_0 et z_1 , z_1 et z_2 , ..., z_{n-1} et z_n ,

$$|f(z_1) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L}, \quad |f(z_2) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L}, \quad \dots, \quad |f(z_n) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2L} \quad (3)$$

où L désigne la longueur de C . Alors de (2) et (3) nous tirons

$$|S_n| \leq \left| \int_{z_0}^{z_1} \{f(z_1) - f(z)\} dz \right| + \left| \int_{z_1}^{z_2} \{f(z_2) - f(z)\} dz \right| + \dots + \left| \int_{z_{n-1}}^{z_n} \{f(z_n) - f(z)\} dz \right|$$

ou

$$|S_n| \leq \frac{\epsilon}{2L} \{|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|\} = \frac{\epsilon}{2} \quad (4)$$

De

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C f(z) dz - S_n + S_n$$

on déduit à l'aide de (1) et (4)

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \left| \oint_C f(z) dz - S_n \right| + |S_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire il en résulte que $\oint_C f(z) dz = 0$ qui est le résultat demandé.

16. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour des ouverts multiplement connexes.

Nous donnons ici une démonstration relative à l'ouvert multiplement connexe $\mathcal{R}$ limité par les courbes fermées simples C_1 et C_2 représentées à la figure 4-16. On peut aisément étendre cette démonstration à d'autres ouverts multiplement connexes (voir Problème 67).

Construisons la coupure AH . L'ouvert connexe limité par $ABDEFGAHJIHA$ est simplement connexe si bien que d'après le problème 15

$$\oint_{ABDEFGAHJIHA} f(z) dz = 0$$

$$\text{D'où} \quad \int_{ABDEFGA} f(z) dz + \int_{AH} f(z) dz + \int_{HJIH} f(z) dz + \int_{HA} f(z) dz = 0$$

$$\text{D'après} \quad \int_{AH} f(z) dz = - \int_{HA} f(z) dz, \text{ ceci devient}$$

$$\int_{ABDEFGA} f(z) dz + \int_{HJIH} f(z) dz = 0$$

Ce qui revient à dire que

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

où C est la frontière totale de $\mathcal{R}$ (formée par la réunion de $ABDEFGA$ et $HJIH$) décrite de telle façon qu'un observateur se déplaçant sur elle ait $\mathcal{R}$ à sa gauche.

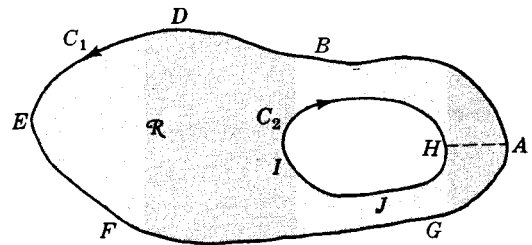


Fig. 4-16

CONSEQUENCES DU THEOREME DE CAUCHY

17. Si $f(z)$ est analytique dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$, montrer que $\int_a^b f(z) dz$ est indépendant du chemin de $\mathcal{R}$ qui joint deux points quelconques a et b de $\mathcal{R}$.

D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{ADBEA} f(z) dz = 0$$

$$\text{ou} \quad \int_{ADB} f(z) dz + \int_{BEA} f(z) dz = 0$$

$$\text{D'où} \quad \int_{ADB} f(z) dz = - \int_{BEA} f(z) dz = \int_{AEB} f(z) dz$$

Donc

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz = \int_a^b f(z) dz$$

qui établit le résultat demandé.

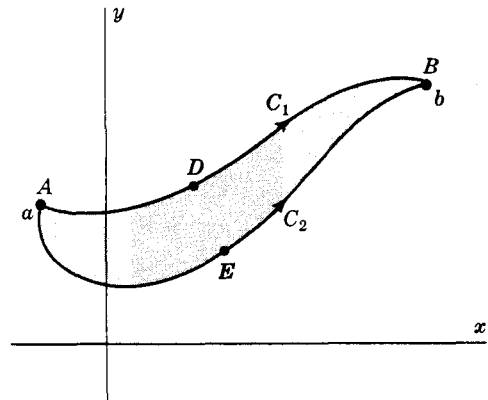


Fig. 4-17

18. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$ et soient a et z des points de $\mathcal{R}$. Démontrer que (a) $F(z) = \int_a^z f(u) du$ est analytique dans $\mathcal{R}$ et que (b) $F'(z) = f(z)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_a^{z + \Delta z} f(u) du - \int_a^z f(u) du \right\} - f(z) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(u) - f(z)] du \end{aligned} \quad (1)$$

D'après le théorème de Cauchy, la dernière intégrale ne dépend pas du chemin joignant z à $z + \Delta z$ pourvu que l'on reste dans $\mathcal{A}$. En particulier nous pouvons choisir comme chemin, le segment de droite d'extrémités z et $z + \Delta z$ (voir Fig. 4-18). (Δz) étant choisi suffisamment petit pour que le segment considéré appartienne à $\mathcal{A}$.

La fonction $f(z)$ étant continue nous avons pour tout point u de ce segment de droite $|f(u) - f(z)| < \epsilon$, pourvu que $|u - z| < \delta$ ce qui est certainement réalisé si $|\Delta z| < \delta$.

De plus, nous avons

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} [f(u) - f(z)] du \right| < \epsilon |\Delta z| \quad (2)$$

si bien que de (1)

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(u) - f(z)] du \right| < \epsilon$$

pour $|\Delta z| < \delta$. Ceci revient à dire que $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$, i.e. $F(z)$ est analytique de $F'(z) = f(z)$.

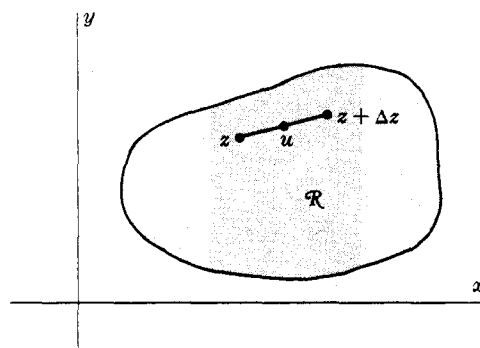


Fig. 4-18

19. Une fonction $F(z)$ telle que $F'(z) = f(z)$ est appelée une intégrale indéfinie de $f(z)$ et est notée $\int f(z) dz$. Montrer que (a) $\int \sin z dz = -\cos z + c$, (b) $\int \frac{dz}{z} = \text{Log } z + c$

(a) De $\frac{d}{dz}(-\cos z + c) = \sin z$, on tire $\int \sin z dz = -\cos z + c$.

(b) De $\frac{d}{dz}(\text{Log } z + c) = \frac{1}{z}$, on tire $\int \frac{dz}{z} = \text{Log } z + c$.

20. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2 (ombré dans la Fig. 4-19), et aussi sur C_1 et C_2 . Démontrer que $\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$ où C_1 et C_2 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur [le sens contraire des aiguilles d'une montre dans la Fig. 4-19]

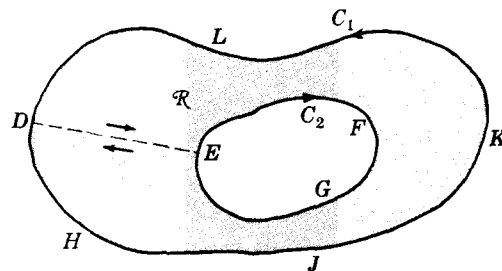


Fig. 4-19

Effectuons la coupure DE . La fonction $f(z)$ étant analytique dans $\mathcal{A}$, nous avons d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{DEFGEDHJKLD} f(z) dz = 0$$

$$\text{ou} \quad \int_{DE} f(z) dz + \int_{EFG} f(z) dz + \int_{ED} f(z) dz + \int_{DHJKLD} f(z) dz = 0$$

$$\text{On déduit de} \quad \int_{DE} f(z) dz = - \int_{ED} f(z) dz,$$

$$\int_{DHJKLD} f(z) dz = - \int_{EFG} f(z) dz = \int_{EGFE} f(z) dz \quad \text{ou} \quad \oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

21. Evaluer $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ où C désigne une courbe fermée simple et $z=a$ est (a) à l'extérieur de C ,
(b) à l'intérieur de C .

(a) Si a est à l'extérieur de C , alors $f(z) = 1/(z-a)$ est analytique à l'intérieur de C et sur C . Alors d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0.$$

(b) Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ϵ , centré en $z=a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z=a$ est un point intérieur].

D'après les résultats du problème 20

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} \quad (1)$$

D'autre part sur Γ , $|z-a| = \epsilon$ ou $z-a = \epsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a + \epsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$, le deuxième membre de (1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

qui est le résultat cherché.

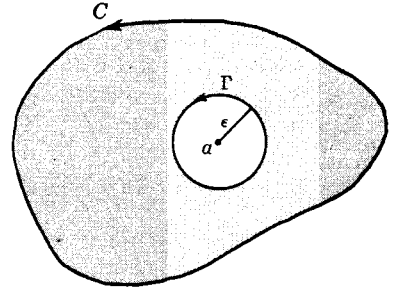


Fig. 4-20

22. Evaluer $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, $n = 2, 3, 4, \dots$ où $z=a$ est à l'intérieur de la courbe fermée simple C .

Comme dans le problème 21, $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)\epsilon^{n-1}} [e^{2(1-n)\pi i} - 1] = 0 \end{aligned}$$

où $n \neq 1$

23. Si C est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 3)$, trouver la valeur de

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz$$

Méthode 1. D'après le problème 17, l'intégrale est indépendante du chemin joignant $(1, 1)$ et $(2, 3)$. N'importe quel chemin peut donc être choisi. En particulier choisissons un contour formé de segments de droite de $(1, 1)$ à $(2, 1)$ puis de $(2, 1)$ à $(2, 3)$.

Cas 1. Le long du segment d'extrémité $(1, 1)$ et $(2, 1)$, $y = 1$, $dy = 0$ si bien que $z = x + iy = x + i$, $dz = dx$. Et la valeur de l'intégrale est

$$\int_{x=1}^2 \{12(x+i)^2 - 4i(x+i)\} dx = \{4(x+i)^3 - 2i(x+i)^2\} \Big|_1^2 = 20 + 30i$$

Cas 2. Le long du chemin de $(2, 1)$ à $(2, 3)$, $x = 2$, $dx = 0$ si bien que $z = x + iy = 2 + iy$, $dz = i dy$. L'intégrale a donc pour valeur.

$$\int_{y=1}^3 \{12(2+iy)^2 - 4i(2+iy)\} i dy = \{4(2+iy)^3 - 2i(2+iy)^2\} \Big|_1^3 = -176 + 8i$$

Par addition, la valeur cherchée est donc $= (20 + 30i) + (-176 + 8i) = -156 + 38i$.

Méthode 2. L'intégrale donnée a pour valeur

$$\int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = (4z^3 - 2iz^2) \Big|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Il est clair que cette deuxième méthode est plus simple.

INTEGRALES DE FONCTIONS PARTICULIERES

 24. Calculer (a) $\int \sin 3z \cos 3z dz$, (b) $\int \cotg(2z + 5) dz$.

 (a) **Méthode 1.** Posons $\sin 3z = u$, d'où $du = 3 \cos 3z dz$ ou $\cos 3z dz = du/3$. Alors

$$\begin{aligned} \int \sin 3z \cos 3z dz &= \int u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u du = \frac{1}{3} \frac{u^2}{2} + c \\ &= \frac{1}{6} u^2 + c = \frac{1}{6} \sin^2 3z + c \end{aligned}$$

Méthode 2.

$$\int \sin 3z \cos 3z dz = \frac{1}{3} \int \sin 3z d(\sin 3z) = \frac{1}{6} \sin^2 3z + c$$

Méthode 3. Posons $\cos 3z = u$. On a donc $du = -3 \sin 3z dz$ ou $\sin 3z dz = -du/3$. Alors

$$\int \sin 3z \cos 3z dz = -\frac{1}{3} \int u du = -\frac{1}{6} u^2 + c_1 = -\frac{1}{6} \cos^2 3z + c_1$$

On remarquera que les résultats obtenus par les méthodes 1 et 3 diffèrent d'une constante.

 (b) **Méthode 1.**

$$\int \cotg(2z + 5) dz = \int \frac{\cos(2z + 5)}{\sin(2z + 5)} dz$$

 On pose $u = \sin(2z + 5)$. On a donc $du = 2 \cos(2z + 5) dz$ et $\cos(2z + 5) dz = du/2$. D'où

$$\int \frac{\cos(2z + 5) dz}{\sin(2z + 5)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \text{Log } u + c = \frac{1}{2} \text{Log } \sin(2z + 5) + c$$

Méthode 2.

$$\begin{aligned} \int \cotg(2z + 5) dz &= \int \frac{\cos(2z + 5)}{\sin(2z + 5)} dz = \frac{1}{2} \int \frac{d\{\sin(2z + 5)\}}{\sin(2z + 5)} \\ &= \frac{1}{2} \text{Log } \sin(2z + 5) + c \end{aligned}$$

 25. (a) Démontrer que $\int F(z) G'(z) dz = F(z) G(z) - \int F'(z) G(z) dz$.

 (b) Calculer $\int z e^{2z} dz$ et $\int_0^1 z e^{2z} dz$.

 (c) Calculer $\int z^2 \sin 4z dz$ et $\int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z dz$.

 (d) Evaluer $\int_C (z + 2)e^{iz} dz$ C étant l'arc de parabole $\pi^2 y = x^2$ d'extrémités $(0, 0)$ et $(\pi, 1)$.

(a) On a

$$d\{F(z) G(z)\} = F(z) G'(z) dz + F'(z) G(z) dz$$

En intégrant les deux membres de cette égalité, il vient

$$\int d\{F(z) G(z)\} = F(z) G(z) = \int F(z) G'(z) dz + \int F'(z) G(z) dz$$

D'où

$$\int F(z) G'(z) dz = F(z) G(z) - \int F'(z) G(z) dz$$

Cette méthode est souvent appelée intégration par parties.

 (b) Soit $F(z) = z$, $G'(z) = e^{2z}$. On a alors $F'(z) = 1$ et $G(z) = \frac{1}{2} e^{2z}$, en omettant la constante d'intégration. D'où en utilisant (a),

$$\begin{aligned} \int z e^{2z} dz &= \int F(z) G'(z) dz = F(z) G(z) - \int F'(z) G(z) dz \\ &= (z) \left(\frac{1}{2} e^{2z} \right) - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2z} dz = \frac{1}{2} z e^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z} + c \end{aligned}$$

et l'on a donc $\int_0^1 z e^{2z} dz = \left(\frac{1}{2} z e^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z} + c \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$

(c) On intègre par parties en choisissant $F(z) = z^2$, $G'(z) = \sin 4z$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} \int z^2 \sin 4z dz &= (z^2) \left(-\frac{1}{4} \cos 4z \right) - \int (2z) \left(-\frac{1}{4} \cos 4z \right) dz \\ &= -\frac{1}{4} z^2 \cos 4z + \frac{1}{2} \int z \cos 4z dz \end{aligned}$$

On intègre par parties la dernière intégrale en choisissant cette fois $F(z) = z$ et $G'(z) = \cos 4z$,

$$\int z \cos 4z dz = (z) \left(\frac{1}{4} \sin 4z \right) - \int (1) \left(\frac{1}{4} \sin 4z \right) dz = \frac{1}{4} z \sin 4z + \frac{1}{16} \cos 4z$$

D'où
$$\int z^2 \sin 4z dz = -\frac{1}{4} z^2 \cos 4z + \frac{1}{8} z \sin 4z + \frac{1}{32} \cos 4z + c$$

et
$$\int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z dz = -\pi^2 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = -\pi^2$$

La double intégration par parties peut être représentée de façon plus suggestive par l'écriture

$$\begin{aligned} \int z^2 \sin 4z dz &= (z^2) \left(-\frac{1}{4} \cos 4z \right) - (2z) \left(-\frac{1}{16} \sin 4z \right) + (2) \left(\frac{1}{64} \cos 4z \right) + c \\ &= -\frac{1}{4} z^2 \cos 4z + \frac{1}{8} z \sin 4z + \frac{1}{32} \cos 4z \end{aligned}$$

où les premières parenthèses de chaque terme [après le premier] sont obtenues par dérivations successives de z^2 , les deuxièmes parenthèses provenant d'intégrations successives de $\sin 4z$ avec alternance de signe.

(d) Les points $(0, 0)$ et $(\pi, 1)$ correspondent à $z = 0$ et à $z = \pi + i$. La fonction $(z + 2) e^{iz}$ étant analytique nous savons d'après le problème 17 que son intégrale ne dépend pas du chemin suivi et est égale à

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi+i} (z+2) e^{iz} dz &= \left\{ (z+2) \left(\frac{e^{iz}}{i} \right) - (1)(-e^{iz}) \right\} \Big|_0^{\pi+i} \\ &= (\pi+i+2) \left(\frac{e^{i(\pi+i)}}{i} \right) + e^{i(\pi+i)} - \frac{2}{i} - 1 \\ &= -2e^{-1} - 1 + i(2 + \pi e^{-1} + 2e^{-1}) \end{aligned}$$

26. Montrer que $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + c_1 = \frac{1}{2ai} \operatorname{Log} \left(\frac{z - ai}{z + ai} \right) + c_2$.

Posons $z = a \operatorname{tg} u$. On a alors

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \int \frac{a du}{a^2 \cos^2 u (1 + \operatorname{tg}^2 u)} = \frac{1}{a} \int du = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + c_1$$

On a également
$$\frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{1}{2ai} \left(\frac{1}{z - ai} - \frac{1}{z + ai} \right)$$

et donc
$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z^2 + a^2} &= \frac{1}{2ai} \int \frac{dz}{z - ai} - \frac{1}{2ai} \int \frac{dz}{z + ai} \\ &= \frac{1}{2ai} \operatorname{Log}(z - ai) - \frac{1}{2ai} \operatorname{Log}(z + ai) + c_2 = \frac{1}{2ai} \operatorname{Log} \left(\frac{z - ai}{z + ai} \right) + c_2 \end{aligned}$$

PROBLEMES DIVERS

27. Démontrer le théorème de Morera [page 95] en faisant l'hypothèse que $f(z)$ a une dérivée continue dans $\mathcal{R}$.

Si $f(z)$ possède une dérivée continue dans $\mathcal{R}$, nous pouvons alors appliquer la formule de Green et nous obtenons

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

Donc si $\oint_C f(z) dz = 0$ sur tout contour fermé C de R , on doit avoir

$$\oint_C u dx - v dy = 0, \quad \oint_C v dx + u dy = 0$$

le long de tout contour fermé C de R . Alors d'après le problème 8, les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

sont satisfaites et donc [car les dérivées partielles sont continues] on peut en déduire [problème 5, Chapitre 3] que $u + iv = f(z)$ est analytique.

28. Un champ de forces est défini par $F = 3z + 5$. Trouver le travail effectué par un point se déplaçant dans ce champ le long de la parabole $z = t^2 + it$ de $z = 0$ à $z = 4 + 2i$.

$$\begin{aligned} \text{Travail total effectué} &= \int_C F \circ dz = \operatorname{Re} \int_C \bar{F} dz = \operatorname{Re} \left\{ \int_C (3\bar{z} + 5) dz \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 3 \int_C \bar{z} dz + 5 \int_C dz \right\} = \operatorname{Re} \{ 3(10 - \frac{8}{3}i) + 5(4 + 2i) \} = 50 \end{aligned}$$

en utilisant le résultat du problème 2.

29. Calculer (a) $\int e^{ax} \sin bx dx$, (b) $\int e^{ax} \cos bx dx$.

En omettant la constante d'intégration, nous avons

$$\int e^{(a+ib)x} dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$$

qui peut être écrit sous la forme

$$\int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)}{a + ib} = \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)(a - ib)}{a^2 + b^2}$$

En égalant les parties réelles et imaginaires on obtient alors,

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

30. Donner un exemple d'une courbe fermée, continue, sans point double, appartenant à un ouvert connexe borné $\mathcal{R}$ mais ayant une longueur infinie.

Considérons le triangle équilatéral ABC [Fig. 4-21] dont les côtés ont une longueur unité. En partageant chaque côté en trois parties égales construisons les triangles équilatéraux DEF , GHJ et KLM . Alors si l'on omet les côtés DF , GJ et KM , on obtient la courbe fermée sans point double $ADEFBGHJCKLMA$ de la figure 4-22.

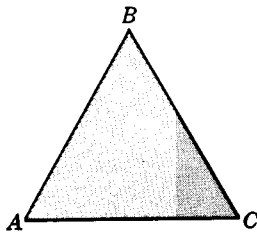


Fig. 4-21

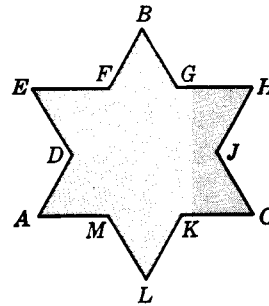


Fig. 4-22

On peut continuer de la même façon en partageant les côtés DE, EF, FB, BG, GH , etc., en trois parties égales et en construisant des triangles équilatéraux sur les segments obtenus comme précédemment. En répétant indéfiniment cette construction [voir figure 4.23] on obtient une courbe fermée sans point double qui est la frontière d'un domaine d'aire finie égale à

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt{3} + (3)(\frac{1}{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + (9)(\frac{1}{9})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + (27)(\frac{1}{27})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \dots \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{1-1/3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

soit 1,5 fois l'aire de ABC , et qui a une longueur infinie (voir problème 91).

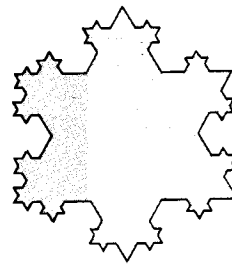


Fig. 4-23

31. Soit $F(x, y)$ et $G(x, y)$ deux fonctions continues, possédant des dérivées partielles premières et secondes continues dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$ dont la frontière est une courbe fermée simple C . Démontrer que

$$\oint_C F \left(\frac{\partial G}{\partial y} dx - \frac{\partial G}{\partial x} dy \right) = - \iint_{\mathcal{R}} \left[F \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

On pose $P = F \frac{\partial G}{\partial y}$, $Q = -F \frac{\partial G}{\partial x}$ dans la formule de Green

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

On obtient alors le résultat demandé

$$\begin{aligned} \oint_C F \left(\frac{\partial G}{\partial y} dx - \frac{\partial G}{\partial x} dy \right) &= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -F \frac{\partial G}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ F \frac{\partial G}{\partial y} \right\} \right) dx dy \\ &= - \iint_{\mathcal{R}} \left[F \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Problèmes supplémentaires

INTEGRALES CURVILIGNES

32. Calculer $\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x+y) dx + (2y-x) dy$ le long (a) de la courbe $y = x^2 + 1$, (b) du segment de droite joignant $(0, 1)$ à $(2, 5)$, (c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(0, 1)$ à $(0, 5)$ et $(0, 5)$ à $(2, 5)$, (d) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(0, 1)$ et $(2, 1)$ et $(2, 1)$ à $(2, 5)$.

Rép. : (a) $88/3$, (b) 32 , (c) 40 , (d) 24

33. (a) Calculer $\oint_C (x+2y) dx + (y-2x) dy$ le long de l'ellipse C définie par $x = 4 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$ C étant parcourue dans le sens rétrograde. Rép. : (a) -48π , (b) 48π

34. Calculer $\int_C (x^2 - iy^2) dz$ le long (a) de la parabole $y = 2x^2$ de $(1, 1)$ à $(2, 8)$, (b) des segments de droite joignant $(1, 1)$ à $(1, 8)$ et $(1, 8)$ à $(2, 8)$, (c) du segment de droite joignant $(1, 1)$ à $(2, 8)$.

Rép. : (a) $\frac{511}{3} - \frac{49}{3}i$, (b) $\frac{518}{3} - 57i$, (c) $\frac{518}{3} - 8i$

35. Calculer $\oint_C |z|^2 dz$ le long du carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Rép. : $-1 + i$.

36. Calculer $\int_C (z^2 + 3z) dz$ le long (a) du cercle $|z| = 2$ de $(2, 0)$ à $(0, 2)$ dans le sens direct, (b) du segment de droite joignant $(2, 0)$ à $(0, 2)$, (c) du contour polygonal formé par les segments de droite joignant $(2, 0)$ à $(2, 2)$ et $(2, 2)$ à $(0, 2)$. *Rép.* : $-\frac{44}{5} - \frac{8}{3}i$ dans tous les cas.
37. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont intégrables montrer que
- $$(a) \int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$$
- $$(b) \int_C \{2f(z) - 3ig(z)\} dz = 2 \int_C f(z) dz - 3i \int_C g(z) dz.$$
38. Calculer $\int_i^{2-i} (3xy + iy^2) dz$ (a) le long de la droite joignant $z = i$ et $z = 2 - i$, (b) le long de la courbe $x = 2t - 2$, $y = 1 + t - t^2$. *Rép.* (a) $-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$, (b) $-\frac{1}{3} + \frac{79}{30}i$
39. Evaluer $\oint_C \bar{z}^2 dz$ sur les cercles (a) $|z| = 1$, (b) $|z - 1| = 1$. *Rép.* (a) 0, (b) $4\pi i$
40. Evaluer $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2) dz$ le long (a) du cercle $|z| = 1$, (b) du carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 0)$, (c) de la courbe formée des arcs de parabole $y = x^2$ de $(0, 0)$ à $(1, 1)$ et $y^2 = x$ de $(1, 1)$ à $(0, 0)$. *Rép.* : 0 dans tous les cas.
41. Evaluer $\int_C (z^2 + 1)^2 dz$ le long de l'arc de cycloïde $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ du point pour lequel $\theta = 0$ au point pour lequel $\theta = 2\pi$. *Rép.* : $(96\pi^5 a^5 + 80\pi^3 a^3 + 30\pi a)/15$.
42. Evaluer $\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 d\bar{z}$ le long de la courbe C définie par $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$ du point $z = 1$ au point $z = 2 + 2i$. *Rép.* : $248/5$.
43. Evaluer $\oint_C \frac{dz}{z - 2}$ le long de (a) du cercle $|z - 2| = 4$, (b) du cercle $|z - 1| = 5$, (c) du carré de sommets $2 \pm 2i$, $-2 \pm 2i$. *Rép.* : $2\pi i$ dans tous les cas.
44. Evaluer $\oint_C (x^2 + iy^2) ds$ le long du cercle $|z| = 2$ où ds désigne l'élément d'arc. *Rép.* : $2\pi(1 + i)$

FORMULE DE GREEN

45. Vérifier la formule de Green pour l'intégrale $\oint_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - x^3y) dy$ où C est un carré de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. *Rép.* : Valeur commune = -8.
46. Evaluer $\oint_C (5x + 6y - 3) dx + (3x - 4y + 2) dy$ le long d'un triangle du plan des xy , de sommets $(0, 0)$, $(4, 0)$ et $(4, 3)$. *Rép.* : -18.
47. C étant une courbe fermée simple limitant un domaine d'aire A , montrer que

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

48. A l'aide du problème 47, trouver l'aire limitée par l'ellipse $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. *Rép.* πab
49. Déterminer l'aire limitée par l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ombrée dans la figure 4.24. [On pourra utiliser les équations paramétriques $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$.] *Rép.* $3\pi a^2/8$

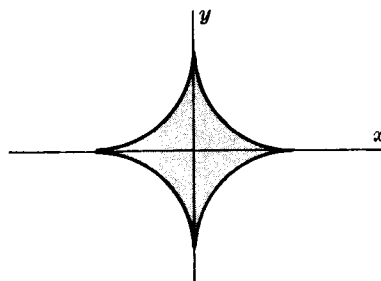


Fig. 4-24

50. Vérifier la formule de Green pour $\oint_C x^2 y dx + (y^3 - xy^2) dy$, où C désigne l'un des deux cercles $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 16$. Rép. : Valeur commune = 120π .
51. (a) Démontrer que $\oint_C (y^2 \cos x - 2e^y) dx + (2y \sin x - 2xe^y) dy = 0$ le long de toute courbe fermée simple C .
(b) Evaluer l'intégrale de (a) le long de la parabole $y = x^2$ de $(0, 0)$ à (π, π^2) . Rép. (b) $-2\pi e^{\pi^2}$.
52. (a) Montrer que $\int_{(2,1)}^{(3,2)} (2xy^3 - 2y^2 - 6y) dx + (3x^2y^2 - 4xy - 6x) dy$ est indépendante du chemin joignant les points $(2, 1)$ et $(3, 2)$. (b) Evaluer l'intégrale de (a). Rép. : (b) 24.

FORME COMPLEXE DE LA FORMULE DE GREEN

53. Si C est une courbe fermée simple délimitant un domaine d'aire A , montrer que $A = \frac{1}{2i} \oint_C \bar{z} dz$.
54. Evaluer $\oint_C \bar{z} dz$ le long (a) du cercle $|z - 2| = 3$, (b) du carré de sommets $z = 0$, $z = 2$, $z = 2i$ et $z = 2 + 2i$, (c) de l'ellipse $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Rép. (a) $18\pi i$, (b) $8i$, (c) $40\pi i$.
55. Evaluer $\oint_C (8\bar{z} + 3z) dz$ le long de l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Rép. : $6\pi i a^2$.
56. On considère les fonctions $P(z, \bar{z})$ et $Q(z, \bar{z})$ continues et à dérivées partielles continues dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$ et sur sa frontière C . Démontrer que
- $$\oint_C P(z, \bar{z}) dz + Q(z, \bar{z}) d\bar{z} = 2i \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dA$$
57. Montrer que l'aire considérée au problème 53 peut être écrite sous la forme $A = \frac{1}{4i} \oint_C \bar{z} dz - z d\bar{z}$.
58. Montrer que le centre de gravité du domaine considéré au problème 53 est donné en coordonnées conjuguées par $(\hat{z}, \bar{\hat{z}})$ où
- $$\hat{z} = -\frac{1}{4Ai} \oint_C z^2 d\bar{z}, \quad \bar{\hat{z}} = \frac{1}{4Ai} \oint_C \bar{z}^2 dz$$
59. Déterminer le centre de gravité du domaine limité supérieurement par $|z| = a > 0$ et inférieurement par $\text{Im } z = c$.
Rép. : $\hat{z} = 2ai/\pi$, $\bar{\hat{z}} = -2ai/\pi$

THEOREME DE CAUCHY ET THEOREME DE CAUCHY-GOURSAT

60. Vérifier le théorème de Cauchy pour les fonctions (a) $3z^2 + iz - 4$, (b) $5 \sin 2z$, (c) $3 \operatorname{ch}(z + 2)$ si C désigne le carré dont les sommets sont $1 \pm i$, $-1 \pm i$.
61. Vérifier le théorème de Cauchy pour la fonction $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ si C est (a) le cercle $|z| = 1$, (b) le cercle $|z - 1| = 2$, (c) l'ellipse $|z - 3i| + |z + 3i| = 20$.
62. C étant le cercle $|z - 2| = 5$ a-t-on $\oint_C \frac{dz}{z - 3} = 0$? (b) La réponse à (a) est-elle en contradiction avec le théorème de Cauchy?
63. Expliquer clairement la relation existant entre les deux résultats suivants

$$\oint_C (x^2 - y^2 + 2y) dx + (2x - 2xy) dy = 0 \quad \text{et} \quad \oint_C (z^2 - 2iz) dz = 0$$

où C désigne une courbe fermée simple quelconque.

64. En évaluant $\oint_C e^z dz$ sur le cercle $|z| = 1$, montrer que
- $$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0$$
65. Enoncer et démontrer le théorème de Cauchy pour des ouverts multiplement connexes.

66. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour un polygone tel que $ABCDEFGA$ représenté à la figure 4.25 dont certains côtés peuvent se couper.
67. Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour un ouvert multiplement connexe $\mathcal{A}$ ombré dans la figure 4.26.

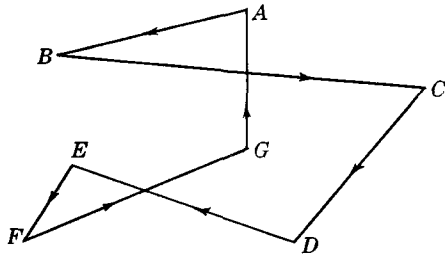


Fig. 4-25

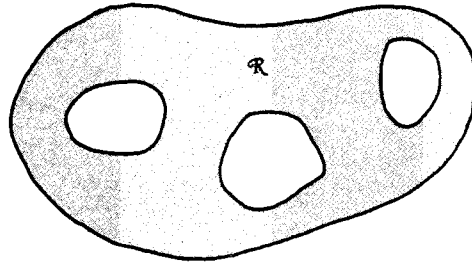


Fig. 4-26

68. (a) Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour un rectangle, (b) montrer comment le résultat de (a) peut être utilisé dans la démonstration du théorème dans le cas d'une courbe fermée simple quelconque C .
69. Soit P et Q des fonctions continues et à dérivées partielles premières continues dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$. On considère une courbe fermée simple quelconque C de $\mathcal{A}$, et l'on suppose que pour toute courbe C

$$\oint_C P dx + Q dy = 0$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction analytique $f(z)$ telle que $\operatorname{Re}\{f'(z) dz\} = P dx + Q dy$ soit une différentielle exacte.

(b) Déterminer p et q en fonction de P et Q de façon que $\operatorname{Im}\{f'(z) dz\} = p dx + q dy$ et vérifier que

$$\oint_C p dx + q dy = 0.$$

(c) Quel rapport il y a-t-il entre (a) et (b) et le théorème de Cauchy ?

70. Illustrer les résultats du problème 69 en prenant $P = 2x + y - 2xy$, $Q = x - 2y - x^2 + y^2$ et en calculant p , q et $f(z)$. Rép. : Une solution possible est $p = x^2 - y^2 + 2y - x$, $q = 2x + y - 2xy$, $f(z) = iz^2 + (2 - i)z$.

71. Soit P et Q des fonctions continues et à dérivées partielles premières continues dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$.

On suppose que pour toute courbe fermée simple C de $\mathcal{A}$ $\oint_C P dx + Q dy = 0$. (a) Démontrer que

$$\oint_C Q dx - P dy = 0. \quad (b) \text{ Quel rapport existe-t-il entre (a) et le théorème de Cauchy.}$$

CONSEQUENCES DU THEOREME DE CAUCHY

72. Montrer directement que $\int_{3+4i}^{4-3i} (6z^2 + 8iz) dz$ a la même valeur le long des contours C suivants joignant les points $3 + 4i$ et $4 - 3i$: (a) un segment de droite, (b) la réunion de deux segments de droite de $3 + 4i$ à $4 + 4i$ et de $4 + 4i$ à $4 - 3i$, (c) le cercle $|z| = 5$. Quelle est cette valeur commune ? Rép. : $238 - 266i$.

73. Montrer que $\int_C e^{-2z} dz$ est indépendante du chemin C joignant les points $1 - \pi i$ et $2 + 3\pi i$ et calculer sa valeur. Rép. : $\frac{1}{2}e^{-2}(1 - e^{-2})$

74. On considère l'intégrale $G(z) = \int_{\pi - \pi i}^z \cos 3\zeta d\zeta$. (a) Démontrer que $G(z)$ est indépendante du chemin joignant $\pi - \pi i$ à un point arbitraire z . (b) Calculer $G(\pi i)$. (c) Montrer que $G'(z) = \cos 3z$. Rép. : (b) 0.

75. On considère l'intégrale $G(z) = \int_{1+i}^z \sin \zeta^2 d\zeta$. (a) Montrer que $G(z)$ est une fonction analytique de z . (b) Démontrer que $G'(z) = \sin z^2$.

76. Enoncer et démontrer un théorème correspondant (a) au problème 17, (b) au problème 18, (c) au problème 20, pour l'intégrale curviligne réelle $\int_C P dx + Q dy$.

77. Démontrer le théorème 5 page 57 pour l'ouvert connexe de la figure 4.26.

78. (a) Si C désigne le cercle $|z| = R$, montrer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0$$

(b) Utiliser le résultat de (a) pour démontrer que si C_1 est le cercle $|z - 2| = 5$, alors

$$\oint_{C_1} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0$$

(c) Le résultat de (b) est-il vrai si le cercle C_1 a pour équation $|z + 1| = 2$? Expliquer.

INTEGRALES DE FONCTIONS PARTICULIERES

79. Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \int e^{-2z} dz, \quad (b) \int z \sin z^2 dz, \quad (c) \int \frac{z^2 + 1}{z^3 + 3z + 2} dz, \quad (d) \int \sin^4 2z \cos 2z dz \\ (e) \int z^2 \operatorname{th}(4z^3) dz \end{aligned}$$

Rép. (a) $-\frac{1}{2}e^{-2z} + c$ (c) $\frac{1}{3}\operatorname{Log}(z^3 + 3z + 2) + c$ (e) $\frac{1}{12}\operatorname{Log} \operatorname{ch}(4z^3) + c$
 (b) $-\frac{1}{2}\cos z^2 + c$ (d) $\frac{1}{10}\sin^5 2z + c$

80. Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \int z \cos 2z dz, \quad (b) \int z^2 e^{-z} dz, \quad (c) \int z \operatorname{Log} z dz, \quad (d) \int z^3 \operatorname{sh} z dz. \\ \text{Rép. (a) } \frac{1}{2}z \sin 2z + \frac{1}{4}\cos 2z + c \quad (c) \frac{1}{2}z^2 \operatorname{Log} z - \frac{1}{4} + c \\ (b) -e^{-z}(z^2 + 2z + 2) + c \quad (d) (z^3 + 6z) \operatorname{ch} z - 3(z^2 + 2) \operatorname{sh} z + c \end{aligned}$$

81. Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \int_{\pi i}^{2\pi i} e^{3z} dz, \quad (b) \int_0^{\pi i} \operatorname{sh} 5z dz, \quad (c) \int_0^{\pi + i} z \cos 2z dz. \\ \text{Rép. (a) } 2/3, \quad (b) -2/5, \quad (c) \frac{1}{4} \operatorname{ch} 2 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 + \frac{1}{2}\pi i \operatorname{sh} 2 \end{aligned}$$

82. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^2 z dz = \int_0^{\pi/2} \cos^2 z dz = \pi/4$.

83. Montrer que $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{z-a}{z+a} \right) + c_1$

84. Montrer que si l'on ne considère qu'une seule branche de la racine carrée :

$$\int z\sqrt{2z+5} dz = \frac{1}{20}(2z+5)^{5/2} - \frac{5}{6}(2z+5)^{3/2} + c$$

85. Calculer $\int \sqrt{1+\sqrt{z+1}} dz$, Sous quelles conditions le résultat est-il valable ?

$$\text{Rép. } \frac{4}{3}(1+\sqrt{z+1})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{z+1})^{3/2} + c$$

PROBLEMES DIVERS

86. En utilisant la définition de l'intégrale montrer que le long d'un chemin arbitraire joignant a et b ,

$$(a) \int_a^b dz = b - a, \quad (b) \int_a^b z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

87. Démontrer le théorème de la page 93 concernant le changement de variables. [On pourra exprimer chaque membre de l'égalité sous forme de deux intégrales curvilignes réelles et utiliser les équations de Cauchy-Riemann]

88. Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique possédant des dérivées partielles continues au moins jusqu'à l'ordre deux, dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$.

(a) Montrer que

$$v(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

est indépendant du chemin de $\mathcal{A}$ joignant (a, b) à (x, y) .

(b) Démontrer que $u + iv$ est une fonction analytique de $z = x + iy$ dans $\mathcal{A}$.

(c) Démontrer que v est harmonique dans $\mathcal{A}$.

89. Résoudre le problème 88 pour les cas particuliers (a) $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$, (b) $u = xe^x \cos y - ye^x \sin y$. [Voir problème 53 (a) et (c) page 86].

90. En utilisant la définition de l'intégrale vérifier directement que

$$(a) \oint_C dz = 0, \quad (b) \oint_C z dz = 0, \quad (c) \oint_C (z - z_0) dz = 0$$

où C est une courbe fermée simple et z_0 une constante quelconque.

91. Déterminer la longueur de la courbe fermée du problème 30 obtenue après n opérations et vérifier que cette longueur devient infinie quand $n \rightarrow \infty$.

92. Calculer $\int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ le long de $x + y = 1$ dans le sens des x croissants. Rép. : $\pi/2$

93. Montrer que $\int_0^\infty xe^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}$.

94. Calculer $\int_{-2-2\sqrt{3}i}^{-2+2\sqrt{3}i} z^{1/2} dz$ sur un chemin d'intégration rectiligne en choisissant la branche de $z^{1/2}$ telle que $z^{1/2} = 1$ pour $z = 1$. Rép. : $32/3$

95. Le théorème de Cauchy est-il valable pour la fonction $f(z) = z^{1/2}$ sur le cercle $|z| = 1$? Expliquer.

96. Le théorème de Cauchy est-il valable pour une courbe telle que $EFGHFJE$ représentée à la figure 4.27, présentant un point double? Justifier votre réponse.

97. C désignant une courbe fermée simple on appelle n le vecteur unitaire de la normale orientée vers l'intérieur de C . On appelle s l'abscisse curviligne sur C et si U désigne une fonction de classe C_1 on pose $\frac{\partial U}{\partial n} = \text{grad } U \cdot n$. Montrer que

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

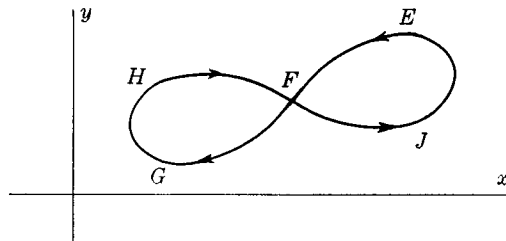


Fig. 4-27

98. Démontrer la première identité de Green

$$\iint_{\mathcal{R}} U \nabla^2 V dx dy + \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C U \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

où $\mathcal{A}$ est l'ouvert connexe limité par la courbe fermée simple C , $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, n et s ayant le même sens qu'au problème 97.

99. Utiliser le problème 98 pour démontrer la deuxième identité de Green

$$\iint_{\mathcal{R}} (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dA = \oint_C \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds$$

où dA est l'élément d'aire de $\mathcal{A}$.

100. Ecrire le résultat du problème 31 à l'aide de l'opérateur ∇ .

101. Evaluer $\oint_C \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 2z + 2}}$ le long du cercle $|z| = 1$ en prenant $z = 1$ pour origine et en supposant la fonction à intégrer positive pour cette valeur.

102. Si n est un entier positif montrer que $\int_0^{2\pi} e^{i n \theta} \cos(\theta - \cos n \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i n \theta} \sin(\theta - \cos n \theta) d\theta = 0$

Formules intégrales de Cauchy

FORMULES INTEGRALES DE CAUCHY

Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , soit a un point intérieur à C [Fig. 5.1], alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (1)$$

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n -ième dérivée de $f(z)$ en $z = a$ est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Le résultat (1) peut être considéré comme un cas particulier de (2) si l'on pose $0! = 1$.

Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction $f(z)$ est connue sur la courbe fermée simple C , alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C . Donc si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première, i.e. est analytique, dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans $\mathcal{R}$. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

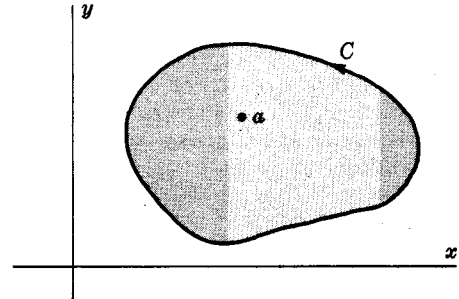


Fig. 5-1

QUELQUES THEOREMES IMPORTANTS

La liste suivante contient quelques théorèmes importants qui sont des conséquences des formules intégrales de Cauchy.

1. Théorème de Morera (réciproque du théorème de Cauchy).

Si $f(z)$ est continue dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$ et si $\oint_C f(z) dz = 0$ sur toute courbe fermée simple de $\mathcal{R}$, alors $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

2. Inégalités de Cauchy.

Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur du cercle C et sur C , où C désigne le cercle d'équation $|z - a| = r$, alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

M désignant une constante telle que $|f(z)| < M$ sur C , i.e. M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur C .

3. Théorème de Liouville.

Supposons que quel que soit z dans le plan complexe (i) $f(z)$ est analytique, (ii) $f(z)$ est bornée, i.e. $|f(z)| < M$ où M désigne une constante. Alors $f(z)$ est constante.

4. Théorème fondamental de l'algèbre.

Toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0$ de degré $n \geq 1$ et telle que $a_n \neq 0$, possède au moins une racine.

De cela on déduit que $P(z) = 0$ possède exactement n racines, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

5. Théorème de Gauss sur la valeur moyenne.

Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$ et sur C , alors $f(a)$ est la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C , i.e.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \quad (4)$$

6. Théorème du module maximum.

Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus $f(z)$ n'est pas constante alors le maximum de $|f(z)|$ est atteint sur C .

7. Théorème du module minimum.

Si $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , si de plus $f(z) \neq 0$ à l'intérieur de C alors $|f(z)|$ atteint son minimum sur C .

8. Théorème de l'argument.

Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \quad (5)$$

où N et P désignent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles de $f(z)$ intérieurs à C .

Pour une généralisation de ce théorème voir le problème 90.

9. Théorème de Rouché.

Si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques dans et sur une courbe fermée simple C , et si $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C .

10. Formules intégrales de Poisson pour un cercle.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans le cercle C et sur le cercle C d'équation $|z| = R$. Alors si $z = re^{i\theta}$ désigne un point quelconque intérieur à C , nous avons

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\phi})}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (6)$$

Si $u(r, \theta)$ et $v(r, \theta)$ désignent la partie réelle et la partie imaginaire de $f(re^{i\theta})$ cependant que $u(R, \phi)$ et $v(R, \phi)$ sont la partie réelle et la partie imaginaire de $f(Re^{i\phi})$, alors

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \phi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (7)$$

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R, \phi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (8)$$

Ces résultats sont appelés formules de Poisson pour un cercle. Ils expriment les valeurs d'une fonction harmonique dans un cercle, en fonction de ses valeurs sur le cercle.

11. Formules intégrales de Poisson pour un demi-plan.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la moitié supérieure $y \geq 0$ du plan de la variable z et soit $\zeta = \xi + i\eta$ un point quelconque de cette région. On a alors

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (9)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de $f(\zeta)$ ont respectivement pour valeurs

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta u(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (10)$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta v(x, 0)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (11)$$

Ces formules sont appelées formules intégrales de Poisson pour un demi-plan. Elles expriment les valeurs prises par une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur, à l'aide des valeurs prises par cette fonction sur l'axe des x [la frontière].

Problèmes résolus

FORMULES INTEGRALES DE CAUCHY

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur de la frontière C d'un ouvert simplement connexe R et sur C , démontrer la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Méthode 1.

La fonction $f(z)/(z - a)$ est analytique à l'intérieur de C et sur C sauf au point $z = a$ (voir Fig. 5-2). D'après le théorème 4 page 97 nous avons

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (1)$$

où l'on peut prendre pour contour Γ un cercle de rayon ϵ centré en a . L'équation de Γ s'écrit donc $|z - a| = \epsilon$ ou $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. De $z = a + \epsilon e^{i\theta}$, on tire $dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$, et l'intégrale du deuxième membre de (1) devient

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \epsilon e^{i\theta}) i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

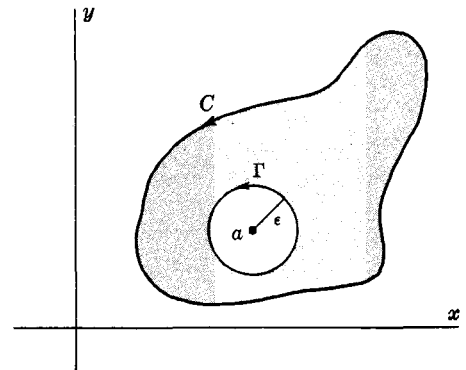


Fig. 5-2

On a donc d'après (1),

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (2)$$

En prenant la limite des deux membres de (2) et en utilisant la continuité de $f(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(a + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a) \end{aligned} \quad (3)$$

on a donc le résultat demandé

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Méthode 2. Le deuxième membre de l'équation (1) de la première méthode peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz &= \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz + \oint_\Gamma \frac{f(a)}{z-a} dz \\ &= \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz + 2\pi i f(a) \end{aligned}$$

en utilisant le problème 21, Chapitre 4. On obtiendra le résultat cherché en montrant que

$$\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0$$

Mais d'après le problème 21, Chapitre 3,

$$\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \oint_\Gamma f'(a) dz + \oint_\Gamma \eta dz = \oint_\Gamma \eta dz$$

Alors en choisissant Γ suffisamment petit pour que $|\eta| < \delta/2\pi$, sur Γ , on trouve

$$\left| \oint_\Gamma \eta dz \right| < \left(\frac{\delta}{2\pi} \right) (2\pi\epsilon) = \epsilon$$

On a donc $\oint_\Gamma \eta dz = 0$ ce qui achève la démonstration.

2. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$ et sur sa frontière C , démontrer que

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

D'après le problème 1, si a et $a+h$ appartiennent à $\mathcal{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a} \right\} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat cherché en prenant la limite de cette expression quand $h \rightarrow 0$, il suffit alors de montrer que le dernier terme tend vers zéro.

Pour montrer cela nous utilisons le fait que si Γ est un cercle de rayon ϵ centré en a et appartenant à $\mathcal{R}$ (voir Fig. 5-3), alors,

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \\ = \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \end{aligned}$$

On choisit alors h suffisamment petit en valeur absolue pour que $a+h$ soit dans Γ et que $|h| < \epsilon/2$; on a alors d'après le problème 7(c), Chapitre 1 et le fait que l'équation de Γ est $|z-a| = \epsilon$,

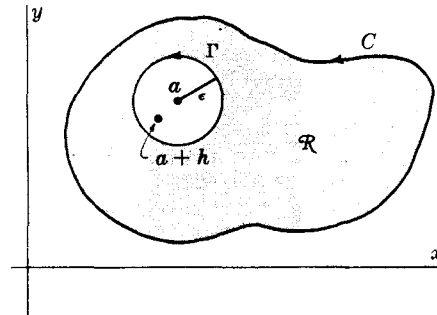


Fig. 5-3

$$|z - a - h| \geq |z - a| - |h| > \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$$

La fonction $f(z)$ étant analytique dans $\mathcal{A}$, nous pouvons trouver un nombre positif M tel que $|f(z)| < M$.

La longueur de Γ est $2\pi\epsilon$, on en déduit

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)(\epsilon^2)} = \frac{2|h|M}{\epsilon^2}$$

et il en résulte que le premier membre tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$, ce qui complète la démonstration.

Il est intéressant de remarquer que le résultat est équivalent à

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\} dz$$

qui est une extension aux intégrales curvilignes de la règle de dérivation sous le signe $\oint$.

3. Démontrer que sous les mêmes conditions qu'au problème 2,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Les cas $n = 0$ et 1 s'obtiennent à partir des problèmes 1 et 2 respectivement à condition de poser $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $0! = 1$.

Pour démontrer la formule dans le cas $n = 2$, on utilise le problème 2 où a et $a + h$ appartiennent à $\mathcal{A}$; on obtient

$$\begin{aligned} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right\} f(z) dz \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3} f(z) dz \end{aligned}$$

On en déduit le résultat cherché en prenant la limite de cette expression quand $h \rightarrow 0$, il suffit alors de démontrer que le dernier terme tend vers zéro. La démonstration est semblable à celle du problème 2, on utilise le fait que les intégrales sur C et sur Γ sont égales et l'on a

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3} f(z) dz \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\epsilon)}{(\epsilon/2)^2(\epsilon^3)} = \frac{4|h|M}{\epsilon^4}$$

car il existe M tel que $|3(z-a) - 2h| f(z) < M$.

De la même façon on peut établir le résultat pour $n = 3, 4, \dots$ (voir problèmes 36 et 37).

Le résultat est équivalent à (voir le dernier paragraphe du problème 2)

$$\frac{d^n}{da^n} f(a) = \frac{d^n}{da^n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\} dz$$

4. Si $f(z)$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, montrer que $f'(z)$, $f''(z) \dots$ sont analytiques dans $\mathcal{R}$.

C'est une conséquence des problèmes 2 et 3.

5. Evaluer (a) $\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz,$

(b) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ où C est le cercle $|z| = 3$.

(a) De $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$ on tire

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz = 2\pi i \{\sin \pi(2)^2 + \cos \pi(2)^2\} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz = 2\pi i \{\sin \pi(1)^2 + \cos \pi(1)^2\} = -2\pi i$$

car $z = 1$ et $z = 2$ sont à l'intérieur de C et $\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$ est analytique dans C . L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

(b) Soit $f(z) = e^{2z}$ et $a = -1$, la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (1)$$

Si $n = 3$, alors $f'''(z) = 8e^{2z}$ et $f'''(-1) = 8e^{-2}$. Dans ces conditions (1) devient

$$8e^{-2} = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

d'où l'on tire la valeur de l'intégrale considérée $8\pi i e^{-2}/3$.

6. Démontrer la formule intégrale de Cauchy pour un ouvert multiplement connexe.

Nous donnons ici une démonstration dans le cas de l'ouvert multiplement connexe $\mathcal{A}$ limité par les courbes fermées C_1 et C_2 représentées à la figure 5-4. On peut étendre aisément cette démonstration à d'autres types d'ouverts multiplement connexes (problème 16, Chapitre 4).

Considérons un cercle Γ centré en un point a de $\mathcal{A}$, tel que Γ appartienne à $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ extérieures à Γ . La fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est analytique dans $\mathcal{A}'$ et sur sa frontière. Le théorème de Cauchy pour les ouverts multiplement connexes s'écrit alors

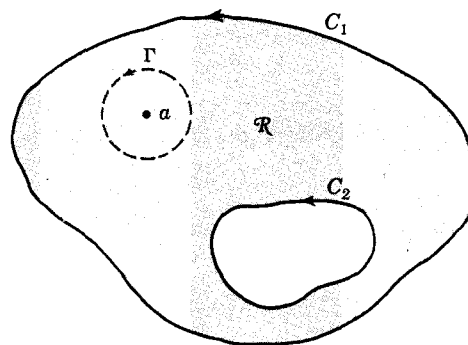


Fig. 5-4

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 \quad (1)$$

Mais d'après la formule intégrale de Cauchy pour les ouverts simplement connexes, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (2)$$

si bien que de (1)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (3)$$

Donc si C représente la frontière totale de $\mathcal{A}$ (décrite de telle façon qu'un observateur parcourant C a toujours $\mathcal{A}$ à sa gauche) on peut écrire (3) sous la forme

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

De la même façon on peut montrer que les autres formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sont encore valables pour des ouverts multiplement connexes (voir Problème 40).

THEOREME DE MORERA

7. Démontrer le théorème de Morera (la réciproque du théorème de Cauchy) : si $f(z)$ est continue dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{R}$ et si

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

sur toute courbe fermée simple de $\mathcal{R}$, alors $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

Si $\oint_C f(z) dz = 0$ quelle que soit C , on en déduit d'après le problème 17, Chapitre 4, que $F(z) = \int_a^z f(z) dz$ ne dépend pas du chemin joignant a et z , pourvu que ce chemin appartienne à $\mathcal{R}$.

Alors par un raisonnement analogue à celui déjà utilisé au problème 18, Chapitre 4, il résulte que $F(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$ et que $F'(z) = f(z)$. Cependant, d'après le problème 2, $F'(z)$ est également analytique dès que $F(z)$ l'est. La fonction $f(z)$ est donc analytique dans $\mathcal{R}$.

INEGALITE DE CAUCHY

8. Si $f(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur du cercle C d'équation $|z - a| = r$, et sur C , démontrer l'inégalité de Cauchy

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

où M désigne une constante telle que $|f(z)| < M$.

On a d'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Alors d'après le problème 3, Chapitre 4, puisque $|z - a| = r$ sur C et que la longueur de C est $2\pi r$.

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

THEOREME DE LIOUVILLE

9. Démontrer le théorème de Liouville : si quel que soit z dans le plan complexe, (i) $f(z)$ est analytique, (ii) $f(z)$ est bornée [i.e. on peut trouver une constante M telle que $|f(z)| < M$] alors $f(z)$ est une constante.

Soit a et b deux points quelconques du plan de la variable z . Considérons le cercle C de rayon r centré en a et contenant le point b (voir Fig. 5-5).

On a d'après la formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-b} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= \frac{b-a}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-b)(z-a)} \end{aligned}$$

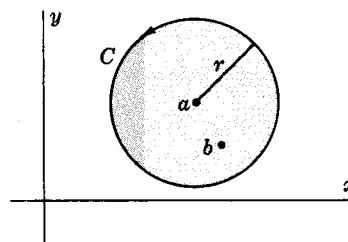


Fig. 5-5

D'autre part

$$|z-a| = r, \quad |z-b| = |z-a+a-b| \geq |z-a| - |a-b| = r - |a-b| \geq r/2$$

si l'on choisit r suffisamment grand pour que $|a-b| < r/2$. Alors tenant compte de $|f(r)| < M$ et de ce que la longueur de C est $2\pi r$, on a d'après le problème 3, Chapitre 4

$$|f(b) - f(a)| = \frac{|b-a|}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-b)(z-a)} \right| \leq \frac{|b-a| M(2\pi r)}{2\pi(r/2)r} = \frac{2|b-a|M}{r}$$

Faisant tendre r vers ∞ on voit alors que $|f(b) - f(a)| = 0$ soit $f(b) = f(a)$ ce qui montre que $f(z)$ est une constante.

Autre méthode. En posant $n = 1$ dans le problème 8 et en remplaçant a par z , on a

$$|f'(z)| \leq M/r$$

Faisant tendre r vers ∞ , on en déduit que $|f'(z)| = 0$ et donc que $f'(z) = 0$. La fonction $f(z)$ est donc constante ce qui démontre le théorème.

THEOREME FONDAMENTAL DE L'ALGEBRE. (THEOREME DE D'ALEMBERT)

10. Démontrer le théorème fondamental de l'algèbre : toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$, de degré $n \geq 1$ et telle que $a_n \neq 0$, possède au moins une racine.

Si $P(z) \neq 0$ n'a pas de racine, alors $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est analytique quel que soit z . De plus $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$ est bornée (en fait tend vers 0) quand $|z| \rightarrow \infty$.

Alors d'après le théorème de Liouville (Problème 9) $f(z)$ et donc $P(z)$ est constant. On est donc conduit à une contradiction et on en conclut que $P(z) = 0$ possède au moins une racine, ou comme on le dit quelquefois, $P(z)$ a au moins un zéro.

11. Démontrer que toute équation algébrique $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$, de degré $n \geq 1$ et telle que $a_n \neq 0$, a exactement n racines.

D'après le théorème fondamental de l'algèbre (Problème 10), $P(z)$ a au moins une racine. Soit α cette racine ; alors $P(\alpha) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} P(z) - P(\alpha) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_n \alpha^n) \\ &= a_1(z - \alpha) + a_2(z^2 - \alpha^2) + \dots + a_n(z^n - \alpha^n) \\ &= (z - \alpha) Q(z) \end{aligned}$$

où $Q(z)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$.

Appliquant à nouveau le théorème fondamental de l'algèbre, nous voyons que $Q(z)$ possède au moins un zéro que nous appellerons β [qui peut être égal à α], d'où $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)R(z)$. En continuant de cette manière on voit que $P(z)$ a exactement n zéros.

THEOREME DE GAUSS SUR LA VALEUR MOYENNE

12. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un cercle C centré en a , et sur C . Démontrer le théorème de Gauss sur la valeur moyenne : la moyenne des valeurs de $f(z)$ sur C est $f(a)$.

D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (1)$$

Si C a pour rayon r , l'équation de C est $|z - a| = r$ ou $z = a + re^{i\theta}$. Donc (1) devient

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

qui est le résultat demandé.

THEOREME DU MODULE MAXIMUM

13. Démontrer le théorème du module maximum : si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , alors $|f(z)|$ prend sa valeur maximum sur C , à moins que $f(z)$ ne soit constante.

Méthode 1.

La fonction $f(z)$ étant analytique, et donc continue, à l'intérieur de C et sur C , on en déduit que $|f(z)|$ passe par un maximum M pour une valeur de z intérieure à C ou située sur C . Supposons que cette valeur

maximum soit atteinte, non pas sur la frontière C , mais en un point intérieur a , i.e. $|f(a)| = M$. Soit C_1 un cercle intérieur à C et centré en a (voir Fig. 5-6). Si l'on exclut le cas où $f(z)$ est constante à l'intérieur de C_1 , il existe au moins un point b dans C_1 tel que $|f(b)| < M$ ou, ce qui est la même chose $|f(b)| = M - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$.

D'autre part la continuité de $|f(z)|$ en b entraîne que pour tout $\epsilon > 0$, on peut déterminer $\delta > 0$ tel que

$$||f(z)| - |f(b)|| < \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{quand } |z - b| < \delta \quad (1)$$

i.e.,

$$|f(z)| < |f(b)| + \frac{1}{2}\epsilon = M - \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = M - \frac{1}{2}\epsilon \quad (2)$$

pour tout point intérieur au cercle C_2 centré en b et de rayon δ (ombré sur la Fig. 5-6).

Considérons le cercle C_3 centré en a et passant par b (en pointillé dans la Fig. 5-6). Sur une portion de ce cercle [plus précisément l'arc PQ intérieur à C_2] on a d'après (2), $|f(z)| < M - \frac{1}{2}\epsilon$. Sur la portion restante du cercle on a $|f(z)| \leq M$.

Si l'on compte les angles θ dans le sens direct à partir de OP et si l'on pose $\widehat{POQ} = \alpha$, on déduit du problème 12 que pour $r = |b - a|$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha f(a + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha |f(a + re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha (M - \frac{1}{2}\epsilon) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi} M d\theta \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} (M - \frac{1}{2}\epsilon) + \frac{M}{2\pi} (2\pi - \alpha) \\ &= M - \frac{\alpha\epsilon}{4\pi} \end{aligned}$$

i.e. $|f(a)| = M \leq M - \frac{\alpha\epsilon}{4\pi}$, ce qui est impossible. Cette contradiction nous permet donc d'affirmer que $|f(z)|$ ne peut atteindre son maximum en un point intérieur à C , ce maximum est donc atteint en un point de C .

Méthode 2.

D'après le problème 12, on a

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta \quad (3)$$

Supposons que $|f(a)|$ soit un maximum, on a donc $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. Si $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ pour une valeur de θ , alors d'après la continuité de f cette inégalité est encore valable pour l'arc $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Mais dans ce cas la valeur moyenne de $|f(a + re^{i\theta})|$ est moins grande que $|f(a)|$, ce qui est en contradiction avec (3). On en déduit que dans tout δ voisinage de a , i.e. pour $|z - a| < \delta$, $f(z)$ est constante. Si $f(z)$ n'est pas constante, $|f(z)|$ atteint sa valeur maximum sur C .

Pour une autre méthode voir le problème 57,

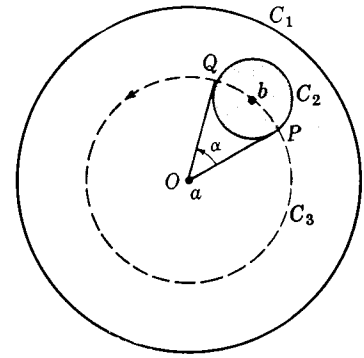


Fig. 5-6

THEOREME DU MODULE MINIMUM

14. Démontrer le théorème du module minimum : on considère une fonction $f(z)$ analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C , et sur C . Démontrer que si $f(z) \neq 0$ dans C alors $|f(z)|$ atteint sa valeur minimum sur C .

La fonction $f(z)$ étant analytique dans C et sur C , $f(z)$ ne s'annulant pas dans C , on en déduit que $1/f(z)$ est analytique dans C . D'après le théorème du module maximum la fonction $1/|f(z)|$ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de C et donc $|f(z)|$ ne peut atteindre son minimum dans C . La fonction $|f(z)|$ ayant un minimum, celui-ci est donc atteint sur C .

15. Donner un exemple montrant que si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , $f(z)$ s'annulant en un point intérieur à C , alors $|f(z)|$ n'atteint pas nécessairement sa valeur minimum sur C .

Soit $f(z) = z$ pour $|z| \leq 1$, C est donc le cercle unité centré à l'origine. Nous avons $f(z) = 0$ en $z = 0$. Si $f(z) = re^{i\theta}$, alors $|f(z)| = r$ et il est clair que la valeur minimum de $|f(z)|$ n'est pas atteinte sur C mais dans C pour $r = 0$, i.e. en $z = 0$.

LE THEOREME DE L'ARGUMENT

16. Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , à l'exception d'un pôle $z = \alpha$ d'ordre (de multiplicité) p , intérieur à C . Supposons également que dans C , $f(z)$ a un seul zéro $z = \beta$ d'ordre (de multiplicité) n et aucun zéro sur C . Démontrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$$

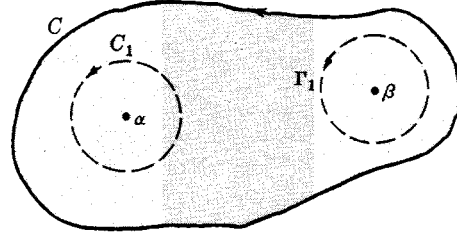


Fig. 5-7

Soit C_1 et Γ_1 deux cercles extérieurs l'un à l'autre situés dans C , et contenant respectivement $z = \alpha$ et $z = \beta$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (1)$$

Le point $z = \alpha$ étant un pôle d'ordre p

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - \alpha)^p} \quad (2)$$

où $F(z)$ est analytique et différente de zéro dans et sur C_1 . En prenant la dérivée logarithmique de (2) on trouve

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z - \alpha} \quad (3)$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{p}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{dz}{z - \alpha} = 0 - p = -p \quad (4)$$

Le point $z = \beta$ étant un zéro d'ordre n

$$f(z) = (z - \beta)^n G(z) \quad (5)$$

où $G(z)$ est analytique et différente de zéro dans et sur Γ_1 .

Par dérivation logarithmique on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - \beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (6)$$

Si bien que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{z - \beta} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = n \quad (7)$$

Dans ces conditions (1), (4) et (7) donnent le résultat demandé

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$$

17. Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , à l'exception d'un nombre fini de pôles intérieurs à C . On suppose que $f(z) \neq 0$ sur C . Si N et P

sont respectivement le nombre de zéros et de pôles de $f(z)$ intérieurs à C comptés avec leur ordre de multiplicité, montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

On désigne respectivement par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ les pôles et les zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur de C [Fig. 5.8] et l'on suppose que les ordres de multiplicité sont respectivement $p_1, p_2, \dots, p_j$ et $n_1, n_2, \dots, n_k$.

On entoure chaque pôle et chaque zéro par des cercles ne se recouvrant pas $C_1, C_2, \dots, C_j$ et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Ceci peut toujours être réalisé car les pôles et les zéros sont isolés.

On a donc d'après les résultats du problème 16

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{r=1}^j \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{r=1}^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \sum_{r=1}^j n_r - \sum_{r=1}^k p_r \\ &= N - P \end{aligned}$$

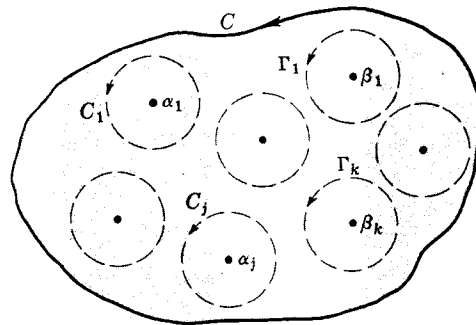


Fig. 5-8

THEOREME DE ROUCHE

18. Démontrer le théorème de Rouché : si $f(z)$ et $g(z)$ sont analytiques à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , si de plus $|g(z)| < |f(z)|$ sur C , alors $f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans C .

Soit $F(z) = g(z)/f(z)$ et donc $g(z) = f(z)F(z)$ ou $g = fF$. Alors si N_1 et N_2 désignant respectivement le nombre de zéros intérieurs à C de $f + g$ et f , on a d'après le problème 17, utilisant le fait que ces fonctions n'ont pas de pôles à l'intérieur de C ,

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + g'}{f + g} dz, \quad N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz$$

On a donc

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + f'F + fF'}{f + fF} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(1+F) + fF'}{f(1+F)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{f'}{f} + \frac{F'}{1+F} \right\} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'}{1+F} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C F'(1 - F + F^2 - F^3 + \dots) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

utilisant le fait que $|F| < 1$ sur C si bien que la série est uniformément convergente sur C et l'intégration terme à terme donne la valeur zéro. On a donc $N_1 = N_2$ ainsi qu'il était demandé.

19. Utiliser le théorème de Rouché (problème 18) pour démontrer que tout polynôme de degré n a exactement n zéros (théorème fondamental de l'algèbre).

Soit $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ le polynôme considéré avec $a_n \neq 0$. On pose $f(z) = a_n z^n$ et $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$.

Si C désigne un cercle centré à l'origine et ayant pour rayon $r > 1$, on a sur C

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| &= \frac{|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|a_n z^n|} \\
&\leq \frac{|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\
&\leq \frac{|a_0| r^{n-1} + |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\
&= \frac{|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}
\end{aligned}$$

On peut donc choisir r suffisamment grand pour que $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$, i.e. $|g(z)| < |f(z)|$. Alors d'après le théorème de Rouché le polynôme donné $f(z) + g(z)$ a le même nombre de zéros que $f(z) = a_n z^n$. Cette dernière fonction ayant n zéros tous situés en $z = 0$, $f(z) + g(z)$ a également n zéros et le théorème est démontré.

20. Démontrer que toutes les racines de $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ sont situées entre les cercles $|z| = 1$ et $|z| = 2$.

Considérons le cercle $C_1 : |z| = 1$. On pose $f(z) = 12$, $g(z) = z^7 - 5z^3$. Sur C_1 nous avons

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 < 12 = |f(z)|$$

D'où par le théorème de Rouché $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ a le même nombre de zéros à l'intérieur de $|z| = 1$ que $f(z) = 12$, i.e. il n'y a pas de zéro à l'intérieur de C_1 .

Considérons le cercle $C_2 : |z| = 2$. Soit $f(z) = z^7$, $g(z) = 12 - 5z^3$, sur C_2 nous avons

$$|g(z)| = |12 - 5z^3| \leq |12| + |5z^3| \leq 60 < 2^7 = |f(z)|$$

D'où par le théorème de Rouché nous voyons que $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ a le même nombre de zéros à l'intérieur de $|z| = 2$ que $f(z) = z^7$, i.e. tous les zéros sont dans C_2 .

Toutes les racines sont dans le cercle $|z| = 2$ mais à l'extérieur du cercle $|z| = 1$ comme il était demandé.

FORMULES INTEGRALES DE POISSON POUR UN CERCLE

21. (a) Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'un cercle C et sur C , le cercle C ayant pour équation $|z| = R$, soit d'autre part $z = re^{i\theta}$ un point quelconque intérieur à C , montrer que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi}) d\phi$$

- (b) Si $u(r, \theta)$ désigne la partie réelle et $v(r, \theta)$ la partie imaginaire de $f(re^{i\theta})$, montrer que

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R, \phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \\
v(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) v(R, \phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2}
\end{aligned}$$

Ces résultats sont appelés formules intégrales de Poisson pour le cercle.

- (a) Le point $z = re^{i\theta}$ étant intérieur à C nous avons d'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (1)$$

Le point inverse de z par rapport à C est à l'extérieur de C et est représenté par $R^2/\bar{z}$. D'après le théorème de Cauchy on a donc

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - R^2/\bar{z}} dw \quad (2)$$

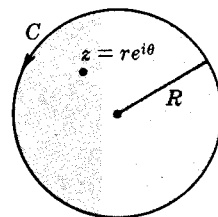


Fig. 5-9

Si l'on retranche (2) de (1), on trouve

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-R^2/\bar{z}} \right\} f(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z - R^2/\bar{z}}{(w-z)(w-R^2/\bar{z})} f(w) dw \end{aligned} \quad (3)$$

On pose $z = re^{i\theta}$ et $w = Re^{i\phi}$, alors tenant compte de $\bar{z} = re^{-i\theta}$ (3) devient

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\{re^{i\theta} - (R^2/r)e^{i\theta}\} f(Re^{i\phi}) iRe^{i\phi} d\phi}{\{Re^{i\phi} - re^{i\theta}\} \{Re^{i\phi} - (R^2/r)e^{i\theta}\}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - R^2) e^{i(\theta+\phi)} f(Re^{i\phi}) d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(re^{i\phi} - Re^{i\theta})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi}) d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi}) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \end{aligned}$$

(b) De $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ et $f(Re^{i\phi}) = u(R, \phi) + i v(R, \phi)$, on déduit d'après (a)

$$\begin{aligned} u(r, \theta) + i v(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) \{u(R, \phi) + i v(R, \phi)\} d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) u(R, \phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) v(R, \phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \end{aligned}$$

Et l'on obtient le résultat cherché en égalant les parties réelles et imaginaires.

FORMULES INTEGRALES DE POISSON POUR UN DEMI-PLAN

22. Démontrer les formules de Poisson pour un demi-plan [voir page 120].

Soit C la frontière d'un demi-cercle de rayon R [voir figure 5.10] admettant ζ pour point intérieur. C entourant ζ mais pas $\bar{\zeta}$, nous avons d'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \zeta} dz, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \bar{\zeta}} dz$$

D'où par soustraction

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \left\{ \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z - \bar{\zeta}} \right\} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(\zeta - \bar{\zeta}) f(z) dz}{(z - \zeta)(z - \bar{\zeta})} \end{aligned}$$

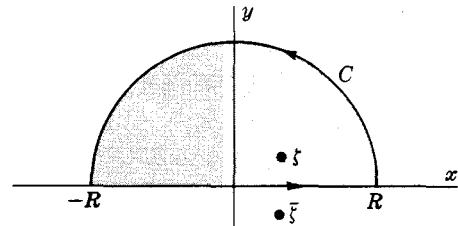


Fig. 5-10

En posant $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, ceci peut s'écrire

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\eta f(x) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\eta f(z) dz}{(z - \zeta)(z - \bar{\zeta})}$$

où Γ désigne la partie circulaire de C . Quand $R \rightarrow \infty$ cette dernière intégrale tend vers zéro [voir problème 76] et nous avons

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2}$$

En posant $f(\zeta) = f(\xi + i\eta) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)$, $f(x) = u(x, 0) + i v(x, 0)$, nous obtenons le résultat demandé

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta u(x, 0) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2}, \quad v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta v(x, 0) dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2}$$

PROBLEMES DIVERS

23. On considère une fonction $f(z)$ analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ limité par deux cercles concentriques C_1 et C_2 , et sur sa frontière [Fig. 5.11]. Montrer que si z_0 désigne un point quelconque de $\mathcal{R}$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

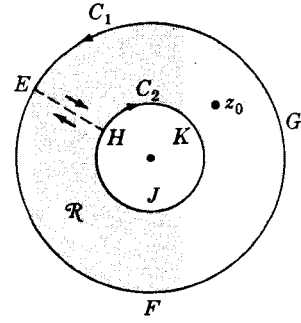


Fig. 5-11

Méthode 1.

On établit la coupure EH reliant les cercles C_1 et C_2 . La fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine borné par $EFGEHKJHE$. On a donc par la formule intégrale de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{EFGEHKJHE} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{EFGE} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{HKJH} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \end{aligned}$$

car les intégrales le long de EH et HE s'annulent.

Des formules semblables peuvent être établies pour les dérivées de $f(z)$.

Méthode 2. Le résultat se déduit également de l'équation (3) du problème 6 si l'on remplace les courbes fermées simples C_1 et C_2 par les cercles de la figure 5.11.

24. Démontrer que $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} 2\pi$ où $n = 1, 2, 3, \dots$

On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ ou $d\theta = dz/iz$ et $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. On a donc, si C désigne le cercle unité $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta &= \oint_C \left\{ \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\}^{2n} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \oint_C \frac{1}{z} \left\{ z^{2n} + \binom{2n}{1} z^{2n-1} \left(\frac{1}{z} \right) + \cdots + \binom{2n}{n} z^{2n-n} \left(\frac{1}{z} \right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{z} \right)^{2n} \right\} dz \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \oint_C \{ z^{2n-1} + \binom{2n}{1} z^{2n-3} + \cdots + \binom{2n}{n} z^{2n-2n-1} + \cdots + z^{-2n} \} dz \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \cdot 2\pi i \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n! n!} 2\pi = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots (n)(n-1) \cdots 1}{2^{2n} n! n!} 2\pi \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} 2\pi \end{aligned}$$

25. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, montrer que u et v sont harmoniques dans $\mathcal{R}$.

Dans le problème 6, chapitre 3, nous avons démontré que u et v sont harmoniques dans $\mathcal{R}$, i.e. vérifient l'équation $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$, sous la condition qu'existent les dérivées partielles secondes de u et v , i.e. qu'existe $f''(z)$.

Il n'est plus nécessaire maintenant de supposer que cette condition est remplie car nous avons démontré dans le problème 4 que si $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$ alors toutes les dérivées de $f(z)$ existent.

26. Démontrer le théorème de Schwarz : soit $f(z)$ une fonction analytique pour $|z| \leq R$, $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$. Alors

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$$

La fonction $f(z)/z$ est analytique dans $|z| \leq R$. On a alors sur $|z| = R$ d'après le théorème du module maximum,

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{M}{R}$$

Cependant cette égalité étant aussi valable pour les points intérieurs au cercle $|z| = R$, nous avons pour $|z| \leq R$ l'inégalité demandée $|f(z)| \leq M|z|/R$.

27. On considère la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ où x est réel. Montrer que cette fonction (a) possède une dérivée première pour toutes les valeurs de x telles que $0 \leq x \leq 1$ mais (b) ne possède pas de dérivée seconde pour tous les points $0 \leq x \leq 1$. (c) Comparer ces résultats et ceux du problème 4.

- (a) La seule valeur de n pour laquelle se pose le problème de l'existence de la dérivée première est $x = 0$. Mais en $x = 0$ la dérivée est définie par

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin(1/\Delta x) = 0 \end{aligned}$$

et existe donc.

Pour toutes les autres valeurs de x dans $0 < x \leq 1$, la dérivée est donnée par

$$x^2 \cos(1/x) \{-1/x^2\} + (2x) \sin(1/x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

à l'aide des règles élémentaires de dérivation.

- (b) D'après la partie (a) nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La dérivée seconde existe pour toutes les valeurs de x telles que $0 < x \leq 1$. En $x = 0$ la dérivée seconde est donnée par

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x \sin(1/\Delta x) - \cos(1/\Delta x) - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{2 \sin(1/\Delta x) - (1/\Delta x) \cos(1/\Delta x)\} \end{aligned}$$

qui n'existe pas.

On en conclut que la dérivée seconde de $f(x)$ n'existe pas pour tous les points de $0 \leq x \leq 1$.

- (c) D'après le problème 4 si $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{A}$ alors toutes ses dérivées existent et sont analytiques dans $\mathcal{A}$. Ceci n'est pas en contradiction avec le résultat précédent car la fonction $f(z) = \sin(1/z)$ n'est pas analytique dans toute région contenant le point $z = 0$.

28. (a) Si $F(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un pôle d'ordre m en $z = a$ intérieur à C , démontrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m F(z)\}$$

- (b) Comment peut-on modifier le résultat de (a) s'il y a plus d'un pôle à l'intérieur de C ?

- (a) Si $F(z)$ a un pôle d'ordre m en $z = a$, alors $F(z) = f(z)/(z-a)^m$ où $f(z)$ est analytique à l'intérieur de C et sur C et de plus $f(a) \neq 0$. On a dans ces conditions d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^m} dz = \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m F(z)\} \end{aligned}$$

- (b) Supposons qu'il y ait deux pôles $z = a_1$ et $z = a_2$, intérieurs à C , d'ordre m_1 et m_2 respectivement. Soit Γ_1 et Γ_2 des cercles intérieurs à C ayant respectivement pour rayon ϵ_1 et ϵ_2 et pour centre a_1 et a_2 . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} F(z) dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} F(z) dz \quad (1) \end{aligned}$$

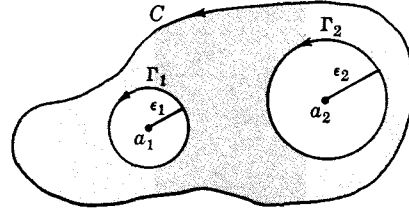


Fig. 5-12

Si $F(z)$ possède un pôle d'ordre m , en $z = a_1$, alors

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{m_1}} \quad \text{où } f_1(z) \text{ est analytique et } f_1(a_1) \neq 0$$

Si $F(z)$ possède un pôle d'ordre m_2 en $z = a_2$, alors

$$F(z) = \frac{f_2(z)}{(z-a_2)^{m_2}} \quad \text{où } f_2(z) \text{ est analytique et } f_2(a_2) \neq 0.$$

On a alors d'après (1) et la partie (a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{m_1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-a_2)^{m_2}} dz \\ &= \lim_{z \rightarrow a_1} \frac{1}{(m_1-1)!} \frac{d^{m_1-1}}{dz^{m_1-1}} \{(z-a_1)^{m_1} F(z)\} \\ &+ \lim_{z \rightarrow a_2} \frac{1}{(m_2-1)!} \frac{d^{m_2-1}}{dz^{m_2-1}} \{(z-a_2)^{m_2} F(z)\} \end{aligned}$$

Si l'on désigne par R_1 et R_2 les limites du second membre, on peut écrire

$$\oint_C F(z) dz = 2\pi i(R_1 + R_2)$$

où R_1 et R_2 sont appelés les résidus de $F(z)$ aux pôles $z = a_1$ et $z = a_2$.

En général si $F(z)$ possède plusieurs pôles intérieurs à C avec les résidus $R_1, R_2, \dots$, alors $\oint_C F(z) dz = 2\pi i$ fois la somme des résidus. Ce résultat est appelé le théorème des résidus. Des applications de ce théorème ainsi que des généralisations à des singularités autres que des pôles sont traitées au Chapitre 7.

29. Calculer $\oint_C \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$ où C désigne le cercle $|z| = 4$.

Les pôles de $\frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - \pi i)^2 (z + \pi i)^2}$ sont $z = \pm \pi i$ à l'intérieur de C , ils sont d'ordre deux.

Le résidu en $z = \pi i$ est $\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z - \pi i)^2 \frac{e^z}{(z - \pi i)^2 (z + \pi i)^2} \right\} = \frac{\pi + i}{4\pi^3}.$

Le résidu en $z = -\pi i$ est $\lim_{z \rightarrow -\pi i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z + \pi i)^2 \frac{e^z}{(z - \pi i)^2 (z + \pi i)^2} \right\} = \frac{\pi - i}{4\pi^3}.$

D'où $\oint_C \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz = 2\pi i$ (somme des résidus) $= 2\pi i \left(\frac{\pi + i}{4\pi^3} + \frac{\pi - i}{4\pi^3} \right) = \frac{i}{\pi}.$

Problèmes supplémentaires

FORMULES INTEGRALES DE CAUCHY

30. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ si C désigne (a) le cercle $|z| = 3$, (b) le cercle $|z| = 1$. *Rép.* (a) e^2 , (b) 0.
31. Calculer $\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \pi/2} dz$ si C désigne le cercle $|z| = 5$. *Rép.* $2\pi i$.
32. Calculer $\oint_C \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$ si C désigne (a) le cercle $|z - 1| = 4$, (b) l'ellipse $|z - 2| + |z + 2| = 6$.
Rép. (a) $-2\pi i$, (b) 0
33. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$ le long d'un rectangle de sommets : (a) $2 \pm i, -2 \pm i$; (b) $-i, 2 - i, 2 + i, i$.
Rép. (a) 0, (b) $-\frac{1}{2}$
34. Montrer que $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$ si $t > 0$ et si C est le cercle $|z| = 3$.
35. Calculer $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ où C est le cercle $|z| = 2$. *Rép.* $-\pi i$.
36. Démontrer que $f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^4}$ où C est une courbe fermée simple entourant $z = a$ et $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur de C et sur C .
37. Démontrer les formules intégrales de Cauchy pour toutes les valeurs positives entières de n [on pourra utiliser un raisonnement par récurrence].
38. Trouver la valeur de (a) $\oint_C \frac{\sin^6 z}{z - \pi/6} dz$, (b) $\oint_C \frac{\sin^6 z}{(z - \pi/6)^3} dz$ si C désigne le cercle $|z| = 1$.
Rép. (a) $\pi i/32$, (b) $21\pi i/16$
39. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2 + 1)^2} dz$ si $t > 0$ et si C désigne le cercle $|z| = 3$. *Rép.* $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$
40. Démontrer les formules intégrales de Cauchy dans le cas de l'ouvert simplement connexe de la figure 4-26 page 115.

THEOREME DE MORERA

41. (a) La fonction $G(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ est-elle indépendante du chemin joignant 1 à z ?
(b) Quelle relation y a-t-il entre votre réponse à (a) et le théorème de Morera ?
42. Le théorème de Morera s'applique-t-il à un ouvert simplement connexe ? Justifiez votre réponse.
43. (a) Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions harmoniques conjuguées et si C désigne une courbe fermée simple, démontrer que $\oint_C P dx + Q dy = 0$.
(b) Si pour toute courbe fermée simple C dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, $\oint_C P dx + Q dy = 0$, les fonctions P et Q sont-elles harmoniques conjuguées ? i.e. la réciproque de (a) est-elle vraie ? Justifiez votre conclusion.

INEGALITES DE CAUCHY

44. (a) Utiliser les inégalités de Cauchy pour avoir une estimation des valeurs des dérivées de $\sin z$ en $z = 0$.
(b) Déterminer la qualité de ces approximations.

45. (a) Montrer que si $f(z) = 1/(1-z)$, alors $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$.
 (b) Utiliser (a) pour montrer que l'inégalité de Cauchy est "la meilleure possible", i.e. l'estimation de la grandeur de la $n^{\text{ième}}$ dérivée ne peut être améliorée pour toutes les fonctions.
46. Démontrer que dans les inégalités de Cauchy (3) page 118 l'égalité ne peut être obtenue que si $f(z) = kMz^n/r^n$ avec $|k| = 1$.
47. Discuter les inégalités de Cauchy pour la fonction $f(z) = e^{-1/z^2}$ dans le voisinage de $z = 0$.

THEOREME DE LIOUVILLE

48. La fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = \sin x$ est (a) analytique partout et (b) bornée i.e. $|\sin x| \leq 1$ pour tout x , mais n'est certainement pas constante. Ceci est-il en contradiction avec le théorème de Liouville ? Expliquez.
49. Une fonction non constante $F(z)$ est telle que $F(z+a) = F(z)$, $F(z+bi) = F(z)$ où $a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes données. Montrer que $F(z)$ ne peut pas être analytique dans le rectangle $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

THEOREME FONDAMENTAL DE L'ALGEBRE

50. (a) Utiliser la méthode de démonstration du théorème fondamental de l'algèbre pour montrer que la fonction particulière $f(z) = z^4 - z^2 - 2z + 2$ a exactement quatre zéros. (b) déterminer les zéros de $f(z)$.
 Rép. (b) 1, 1, $-1 \pm i$
51. Déterminer les racines des équations (a) $z^3 - 3z + 4i = 0$, (b) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
 Rép. (a) i , $\frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{15})$, (b) $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

THEOREME DE GAUSS SUR LA VALEUR MOYENNE

52. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\pi/6 + 2e^{i\theta}) d\theta$ Rép. 1/4
53. Montrer que la valeur moyenne de toute fonction harmonique sur un cercle est égale à la valeur que prend la fonction au centre du cercle.
54. Déterminer la valeur moyenne de $x^2 - y^2 + 2y$ sur le cercle $|z - 5 + 2i| = 3$. Rép. 5.
55. Démontrer que $\int_0^\pi \text{Log} \sin \theta d\theta = -\pi \text{Log} 2$. [On pourra utiliser la fonction $f(z) = \text{Log}(1+z)$].

THEOREME DU MODULE MAXIMUM

56. Déterminer le maximum de $|f(z)|$ dans $|z| \leq 1$ pour les fonctions $f(z)$ suivantes (a) $z^2 - 3z + 2$, (b) $z^4 + z^2 + 1$, (c) $\cos 3z$, (d) $(2z+1)/(2z-1)$.
57. (a) Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , si $z = a$ désigne un point intérieur à C , montrer que

$$\{f(a)\}^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\{f(z)\}^n}{z-a} dz \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

 (b) Utiliser (a) pour démontrer que $|f(a)|^n \leq M^n/2\pi D$ où D désigne la distance minimum de a à la courbe C et M la valeur maximum de $|f(z)|$ sur C .
 (c) En prenant la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres de l'inégalité de (b) et en faisant tendre n vers ∞ démontrer le théorème du module maximum.
58. On considère une fonction $U(x, y)$ harmonique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C . Montrer que (a) le maximum et (b) le minimum de $U(x, y)$ sont atteints sur C . Y a-t-il d'autres restrictions pour $U(x, y)$?
59. Vérifier le problème 58 à l'aide des fonctions (a) $x^2 - y^2$ et (b) $x^3 - 3xy^2$ si C est le cercle $|z| = 1$.
60. Le théorème du module maximum est-il valable pour des ouverts multiplement connexes ? Justifiez votre réponse.

LE THEOREME DE L'ARGUMENT

61. Si $f(z) = z^5 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$, évaluer $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ où C entoure tous les zéros de $f(z)$. Rép. $10\pi i$.

62. Soit $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^3}$. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ où C est le cercle $|z| = 4$. Rép. -2 .

63. Calculer $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ si C désigne le cercle $|z| = \pi$ et (a) $f(z) = \sin \pi z$, (b) $f(z) = \cos \pi z$, (c) $f(z) = \operatorname{tg} \pi z$.

Rép. (a) $14\pi i$, (b) $12\pi i$, (c) $2\pi i$

64. Si $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ et si C est le cercle $|z| = 5$, calculer $\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$. Rép. $4\pi i$

THEOREME DE ROUCHE

65. Si $a > e$, démontrer que l'équation $az^n = e^z$ a n racines dans le cercle $|z| = 1$.

66. Démontrer que l'équation $ze^z = a$, où $a \neq 0$, possède une infinité de racines.

67. Démontrer que l'équation $\operatorname{tg} z = az$, $a > 0$ possède (a) une infinité de racines réelles, (b) seulement deux racines imaginaires pures si $0 < a < 1$, (c) uniquement des racines réelles si $a \geq 1$.

68. Démontrer que l'équation $z \operatorname{tg} z = a$, $a > 0$ possède une infinité de racines réelles mais aucune racine imaginaire.

FORMULES INTEGRALES DE POISSON POUR UN CERCLE

69. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi = 2\pi$$

(a) à l'aide de, (b) sans l'aide de la formule intégrale de Poisson pour un cercle.

70. Montrer que (a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos \phi} \cos(\sin \phi)}{5 - 4 \cos(\theta - \phi)} d\phi = \frac{2\pi}{3} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta)$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos \phi} \sin(\sin \phi)}{5 - 4 \cos(\theta - \phi)} d\phi = \frac{2\pi}{3} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta)$$

71. (a) Montrer que la fonction $U(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right)$, $0 < r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ est harmonique à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

(b) Montrer que $\lim_{r \rightarrow 1^-} U(r, \theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$.

(c) Peut-on déduire l'expression de $U(r, \theta)$ de la formule intégrale de Poisson pour un cercle ?

72. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur du cercle C d'équation $|z| = R$ et sur C , si de plus $z = re^{i\theta}$ désigne un point quelconque de l'intérieur de C , montrer que

$$f'(re^{i\theta}) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(R^2 - r^2) f(Re^{i\phi}) \sin(\theta - \phi)}{[R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2]^2} d\phi$$

73. Vérifier que les fonctions u et v des équations (7) et (8), page 119, sont solutions de l'équation de Laplace.

FORMULES INTEGRALES DE POISSON POUR UN DEMI-PLAN

74. Déterminer une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur $y > 0$ prenant sur l'axe des x les valeurs -1 si $x < 0$ et 1 si $x > 0$. Rép. $1 - (2/\pi) \operatorname{arctg} y/x$.

75. Résoudre le problème 74 avec les valeurs -1 si $x < -1$, 0 si $-1 < x < 1$, et 1 si $x > 1$.

Rép. $1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+1} \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-1} \right)$.

76. Démontrer le résultat utilisé au problème 22 : l'intégrale sur Γ tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$.

77. Démontrer que si $f(x)$ satisfait à des conditions que l'on précisera

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx = f(\xi)$$

78. Vérifier que les fonctions u et v des équations (10) et (11) sont solutions de l'équation de Laplace.

PROBLEMES DIVERS

79. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 dz}{z^2 + 4}$ où C désigne le carré de sommets $\pm 2, \pm 2 + 4i$. Rép. i .

80. Calculer $\oint_C \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz$ où C est le cercle $|z| = 1$ et $t > 0$. Rép. $-2\pi i t^2$.

81. (a) Montrer que $\oint_C \frac{dz}{z+1} = 2\pi i$ si C est le cercle $|z| = 2$.

(b) Utiliser (a) pour montrer que

$$\oint_C \frac{(x+1) dx + y dy}{(x+1)^2 + y^2} = 0, \quad \oint_C \frac{(x+1) dy - y dx}{(x+1)^2 + y^2} = 2\pi$$

et vérifier ces résultats directement.

82. Trouver toutes les fonctions $f(z)$ analytiques dans tout le plan complexe et qui vérifient les conditions (a) $f(2-i) = 4i$ et (b) $|f(z)| < e^2$ pour tout z .

83. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , démontrer que

$$(a) \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(a + e^{i\theta}) d\theta$$

$$(b) \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(a + e^{i\theta}) d\theta$$

84. Montrer que l'équation $8z^4 - 6z + 5 = 0$ possède une racine dans chaque quadrant.

85. Montrer que (a) $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 0$, (b) $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta = 2\pi$.

86. Etendre le résultat du problème 23 de façon à obtenir des formules donnant les dérivées de $f(z)$ en un point quelconque de $\mathcal{A}$.

87. Démontrer que l'équation $z^3 e^{1-z} = 1$ possède exactement deux racines dans le cercle $|z| = 1$.

88. Si $t > 0$ et si C désigne une courbe fermée simple entourant $z = -1$, démontrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \left(t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}$$

89. Déterminer toutes les fonctions $f(z)$ analytiques dans $|z| < 1$ et qui vérifient les conditions (a) $f(0) = 1$ et (b) $|f(z)| \geq 1$ pour $|z| < 1$.

90. Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions analytiques à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , $f(z)$ ayant toutefois des zéros en $a_1, a_2, \dots, a_m$ et des pôles en $b_1, b_2, \dots, b_n$ d'ordres respectifs $p_1, p_2, \dots, p_m$ et $q_1, q_2, \dots, q_n$. Démontrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m p_k g(a_k) - \sum_{k=1}^n q_k g(b_k)$$

91. Si $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ où $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes constants et où C entoure les zéros de $f(z)$, évaluer (a) $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$, (b) $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$ et interpréter les résultats obtenus. *Rép.* (a) $-a_1/a_0$, (b) $(a_1^2 - 2a_0 a_2)/a_0^2$
92. Trouver toutes les fonctions $f(z)$ analytiques dans $|z| \leq 1$ et qui sont telles que (a) $f(0) = 3$ et (b) $|f(z)| \leq 3$ pour tout z tel que $|z| < 1$.
93. Montrer que l'équation $z^6 + 192z + 640 = 0$ possède une racine dans le premier et dans le quatrième quadrant et deux racines dans le deuxième et dans le troisième.
94. Montrer que la fonction $xy(x^2 - y^2)$ ne peut présenter de maximum absolu ni de minimum absolu dans le cercle $|z| = 1$.
95. (a) Si une fonction est analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, est-elle bornée dans $\mathcal{A}$? (b) d'après votre réponse à (a) est-il nécessaire de supposer $f(z)$ bornée dans le théorème de Liouville?
96. Déterminer toutes les fonctions $f(z)$ qui sont analytiques dans tout le plan complexe, ont un zéro d'ordre 2 en $z = 0$, vérifient la condition $|f'(z)| \leq 6|z|$ pour tout z et sont telles que $f(i) = -2$.
97. Démontrer que toutes les racines de $z^5 + z - 16i = 0$ sont situées entre les cercles $|z| = 1$ et $|z| = 2$.
98. Si U est harmonique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , démontrer que
- $$\oint_C \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$$
- où n est un vecteur unitaire normal à C dans le plan des z et ds désigne l'élément d'arc sur C .
99. Un théorème dû à Cauchy établit que toutes les racines de l'équation $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$, où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont réels, sont situées dans le cercle $|z| = 1 + \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, i.e. $|z| = 1$ plus le maximum des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$. Vérifier ce théorème dans les cas particuliers suivants (a) $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$, (b) $z^4 + z^2 + 1 = 0$, (c) $z^4 - z^2 - 2z + 2 = 0$, (d) $z^4 + 3z^2 - 6z + 10 = 0$.
100. Démontrer le théorème de Cauchy énoncé dans le Problème 99.
101. Soit $P(z)$ un polynôme quelconque. Si m désigne un entier positif quelconque et si $\omega = e^{2\pi i/m}$, montrer que
- $$\frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) + \dots + P(\omega^{m-1})}{m} = P(0)$$
- et donner une interprétation géométrique.
102. Le résultat du problème 101 est-il vrai pour toute fonction $f(z)$? justifier la réponse.
103. Démontrer le théorème de Jensen : Si $f(z)$ est analytique dans le cercle $|z| = R$ et sur celui-ci, sauf pour les zéros $a_1, a_2, \dots, a_m$ d'ordres $p_1, p_2, \dots, p_m$ et les pôles $b_1, b_2, \dots, b_n$ d'ordres $q_1, q_2, \dots, q_n$ et si $f(0)$ est fini et différent de zéro, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log}|f(Re^{i\theta})| d\theta = \text{Log}|f(0)| + \sum_{k=1}^m p_k \text{Log}\left(\frac{R}{|a_k|}\right) - \sum_{k=1}^n q_k \text{Log}\left(\frac{R}{|b_k|}\right)$$

[On pourra considérer l'intégrale $\oint_C \text{Log} z \{f'(z)/f(z)\} dz$ où C est le cercle $|z| = R$.]

CHAPITRE 6

Séries infinies, séries de Taylor, séries de Laurent

SUITES DE FONCTIONS

Les notions du Chapitre 2, pages 40 et 41, sur les suites et les séries numériques s'étendent aisément aux suites et séries de fonctions.

Soit $u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z), \dots$, ou $\{u_n(z)\}$, une suite de fonctions définies et uniformes dans une région du plan de la variable z . On désigne par $U(z)$ la limite de $u_n(z)$ quand $n \rightarrow \infty$, et l'on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = U(z)$, si pour tout ϵ positif on peut trouver un nombre N [qui dépend en général à la fois de ϵ et de z] tel que

$$|u_n(z) - U(z)| < \epsilon \quad \text{pour tout } n > N$$

Dans de telles conditions on dit que la suite est convergente ou converge vers $U(z)$.

Si une suite est convergente pour tous les points z d'un domaine $\mathcal{R}$, on appelle $\mathcal{R}$ le domaine de convergence de la suite. Une suite qui n'est pas convergente pour une valeur de z est dite divergente en z .

Les théorèmes sur les limites donnés à la page 40 peuvent s'étendre aux suites de fonctions.

SERIES DE FONCTIONS

A partir de la suite de fonctions $\{u_n(z)\}$ formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$\begin{aligned} S_1(z) &= u_1(z) \\ S_2(z) &= u_1(z) + u_2(z) \\ &\vdots \\ S_n(z) &= u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) \end{aligned}$$

où $S_n(z)$ appelée la $n^{\text{ième}}$ somme partielle est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$.

La suite $S_1(z), S_2(z), \dots$ ou $\{S_n(z)\}$ est représentée par

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (1)$$

appelée série infinie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite convergente et $S(z)$ est sa somme ;

dans le cas contraire la série est dite divergente. On écrira quelquefois $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ pour $\Sigma u_n(z)$ ou Σu_n par abréviation.

Comme nous l'avons déjà vu, une condition nécessaire pour que la série (1) converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$, mais ce n'est pas suffisant. On pourra par exemple se reporter au problème 150, chapitre 2 et aussi aux problèmes 67 (c), 67 (d) et 111 (a).

Si une série converge pour toutes les valeurs de z dans un domaine $\mathcal{R}$, on dit que $\mathcal{R}$ est le domaine de convergence de la série.

CONVERGENCE ABSOLUE

Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|, \text{ converge.}$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge mais que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ ne converge pas, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est dite semi-convergente.

CONVERGENCE UNIFORME DES SUITES ET DES SERIES

Dans la définition de la limite d'une suite nous avons fait la remarque que le nombre N dépend en général de ϵ et de la valeur particulière de z . Il peut arriver cependant que nous puissions trouver un nombre N tel que $|u_n(z) - U(z)| < \epsilon$ pour tout $n > N$, où la même valeur de N convient pour tous les points z du domaine $\mathcal{R}$ considéré [i.e. N dépend uniquement de ϵ et non de la valeur particulière de z dans $\mathcal{R}$]. Dans de telles circonstances on dit que $u_n(z)$ converge uniformément, ou est uniformément convergente vers $U(z)$ pour tout z dans $\mathcal{R}$.

Si l'on appelle $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots = S(z) - S_n(z)$ le reste d'ordre n , de la série (1), nous pouvons dire de façon équivalente que la série converge uniformément vers $S(z)$ dans $\mathcal{R}$, si pour tout $\epsilon > 0$ donné on peut trouver un nombre N tel que pour tout z dans $\mathcal{R}$,

$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| < \epsilon \text{ pour tout } n > N$$

SERIES ENTIERES

Une série de la forme

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad (2)$$

est appelée série entière en $z-a$. Au lieu de (2) nous écrirons quelquefois $\sum a_n(z-a)^n$.

La série (2) converge de façon évidente pour $z=a$ et ce point peut être le seul pour lequel il y ait convergence [voir problème 13(b)]. Cependant en général la série converge également en d'autres points. En pareil cas on peut montrer qu'il existe un nombre positif R tel que (2) converge pour $|z-a| < R$ et diverge pour $|z-a| > R$, cependant que pour $|z-a| = R$ elle peut ou non converger.

Géométriquement si Γ est le cercle de rayon R centré en $z=a$, alors la série (2) converge en tous les points intérieurs à Γ et diverge en tous les points extérieurs; elle peut ou non converger sur le cercle Γ . Les valeurs spéciales $R=0$ et $R=\infty$ correspondent aux cas où (2) converge uniquement en $z=a$ ou converge pour toute valeur (finie) de z . En raison de cette interprétation géométrique R est souvent appelé le rayon de convergence de (2) et le cercle correspondant est appelé le cercle de convergence.

QUELQUES THEOREMES IMPORTANTS

Pour servir de référence nous donnons ici une liste de quelques théorèmes importants sur les suites et les séries. Beaucoup d'entre eux sont très proches de théorèmes analogues pour les variables réelles.

A. Théorèmes généraux

Théorème 1. Si une suite a une limite, cette limite est unique [i.e. c'est la seule].

Théorème 2. On considère $u_n = a_n + ib_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, où a_n et b_n sont réels. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{u_n\}$ converge est que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent.

Théorème 3. Soit $\{a_n\}$ une suite réelle possédant les propriétés

$$(i) \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \text{ou} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad (ii) \quad |a_n| < M \text{ (une constante)}$$

Alors $\{a_n\}$ converge.

Si la première condition de (i) est réalisée la suite est dite monotone croissante, si la deuxième condition de (i) est réalisée la suite est dite monotone décroissante. Si la propriété (2) est vérifiée la suite est dite bornée. Le théorème établit donc que toute suite monotone bornée (croissante ou décroissante) possède une limite.

Théorème 4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{u_n\}$ converge est que pour tout $\epsilon > 0$ on puisse trouver un nombre N tel que $|u_p - u_q| < \epsilon$ pour tout $p > N, q > N$.

Ce résultat qui présente l'avantage de ne pas faire figurer la valeur de la limite est appelé le critère de convergence de Cauchy.

Théorème 5. Une condition nécessaire pour que $\sum u_n$ converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Cependant cette condition n'est pas suffisante.

Théorème 6. La multiplication de chaque terme d'une série par une constante non nulle ne change pas la nature de cette série. Si l'on retranche (ou si l'on ajoute) un nombre fini de termes d'une série celle-ci ne change pas de nature.

Théorème 7. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n)$ converge, a_n et b_n étant réels, est que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.

B. Théorèmes sur la convergence absolue.

Théorème 8. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Autrement dit une série absolument convergente est convergente.

Théorème 9. Les termes d'une série absolument convergente peuvent être ordonnés de façon quelconque, la série ainsi obtenue converge vers la même somme. Les sommes, différences et produits de séries absolument convergentes sont également absolument convergentes.

Ces résultats ne s'appliquent pas aux séries semi-convergentes (voir problème 127).

C. Critères spéciaux de convergence

Théorème 10. (Critères de comparaison).

(a) Si $\sum |v_n|$ converge et si $|u_n| \leq |v_n|$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

(b) Si $\sum |v_n|$ diverge et si $|u_n| \geq |v_n|$, alors $\sum |u_n|$ diverge mais $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Théorème 11. (Critère de d'Alembert)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$, alors $\sum u_n$ converge (absolument) si $L < 1$ et diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ on ne peut conclure.

Théorème 12. (Critère de Cauchy).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$, alors $\sum u_n$ converge (absolument) si $L < 1$ et diverge si $L > 1$. Si $L = 1$ on ne peut conclure.

Théorème 13. (Critère de l'intégrale). Si $f(x) \geq 0$ pour $x \geq a$, alors $\sum f(n)$ converge ou diverge selon que $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$ converge ou diverge.

Théorème 14. (Critère de Raabe).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = L$, alors Σu_n converge (absolument) si $L > 1$ et diverge ou est semi-convergente si $L < 1$. Si $L = 1$ on ne peut conclure.

Théorème 15. (Critère de Gauss).

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$ où $|c_n| < M$ pour tout $n > N$, alors Σu_n converge (absolument) si $L > 1$ et diverge ou est semi-convergente si $L \leq 1$.

Théorème 16. (Critère des séries alternées).

Si $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $a_1 - a_2 + a_3 - \dots = \Sigma (-1)^{n-1} a_n$ converge.

D. Théorèmes sur la convergence uniforme

Théorème 17. (Critère de Weierstrass).

Si $|u_n(z)| \leq M_n$ où M_n est indépendant de z dans une région $\mathcal{R}$ et ΣM_n converge, alors $\Sigma u_n(z)$ est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$.

Théorème 18. La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue, i.e. si $u_n(z)$ est continue dans $\mathcal{R}$ et si $S(z) = \Sigma u_n(z)$ est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$, alors $S(z)$ est continue dans $\mathcal{R}$.

Théorème 19. Si $\{u_n(z)\}$ est continue dans $\mathcal{R}$, si $S(z) = \Sigma u_n(z)$ est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$ et si C est une courbe de $\mathcal{R}$, alors

$$\begin{aligned} \int_C S(z) dz &= \int_C u_1(z) dz + \int_C u_2(z) dz + \dots \\ \text{ou} \\ \int_C \{ \Sigma u_n(z) \} dz &= \Sigma \int_C u_n(z) dz \end{aligned}$$

En d'autres termes une série uniformément convergente de fonctions continues peut être intégrée terme à terme.

Théorème 20. Si $u'_n(z) = \frac{d}{dz} u_n(z)$ existe dans $\mathcal{R}$, si $\Sigma u'_n(z)$ converge uniformément dans $\mathcal{R}$ et si $\Sigma u_n(z)$ converge dans $\mathcal{R}$, alors $\frac{d}{dz} \Sigma u_n(z) = \Sigma u'_n(z)$.

Théorème 21. Si les fonctions $u_n(z)$ sont analytiques, si $\Sigma u_n(z)$ converge uniformément dans $\mathcal{R}$, alors $S(z) = \Sigma u_n(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

E. Théorèmes sur les séries entières

Théorème 22. Une série entière converge uniformément et absolument dans tout ouvert connexe intérieur au cercle de convergence.

Théorème 23.

- (a) Une série entière peut être dérivée terme à terme dans tout ouvert connexe situé à l'intérieur du cercle de convergence.
- (b) Une série entière peut être intégrée terme à terme sur toute courbe C située entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.
- (c) La somme d'une série entière est continue dans tout ouvert connexe situé entièrement à l'intérieur du cercle de convergence.

Ces propriétés sont des conséquences des théorèmes 17, 18, 19 et 21.

Théorème 24. (Théorème d'Abel).

Considérons la série $\Sigma a_n z^n$ de rayon de convergence R et supposons que z_0 est un point du cercle de convergence pour lequel la série converge. Alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \Sigma a_n z^n = \Sigma a_n z_0^n$ où $z \rightarrow z_0$ de l'intérieur du cercle de convergence.

Des extensions à d'autres séries de puissances peuvent être faites aisément.

Théorème 25. Si $\sum a_n z^n$ converge vers zéro pour tout z tel que $|z| < R$ où $R > 0$, alors $a_n = 0$. De façon équivalente on peut dire que si $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ pour tout z tel que $|z| < R$, alors $a_n = b_n$.

THEOREME DE TAYLOR

Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C . Alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots \quad (3)$$

ou en posant $z = a+h$, $h = z-a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (4)$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et la série (3) ou (4) est appelée série de Taylor ou développement de Taylor de $f(a+h)$ ou $f(z)$.

Le domaine de convergence de la série (4) est défini par $|z-a| < R$, le rayon de convergence R étant égal à la distance de a à la singularité de $f(z)$ la plus proche. Sur $|z-a| = R$ la série peut ou non converger. Pour $|z-a| > R$ la série diverge.

Si la singularité la plus proche est à l'infini, le rayon de convergence est infini, i.e. la série converge quel que soit z .

Si $a = 0$ dans (3) ou (4) la série obtenue est souvent appelée série de Maclaurin.

QUELQUES SERIES PARTICULIERES

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence. Dans le cas de fonctions multiforme on a indiqué la branche principale.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad |z| < \infty$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad |z| < \infty$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad |z| < \infty$
4. $\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad |z| < 1$
5. $\text{arctg } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad |z| < 1$
6. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}z^n + \dots \quad |z| < 1$

C'est la série du binôme. Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

THEOREME DE LAURENT

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2 [Fig. 6.1]. On suppose que $f(z)$ est uniforme et analytique sur C_1 et C_2 et également dans la couronne $\mathcal{R}$ [ou région annulaire $\mathcal{R}$] limitée par C_1 et C_2 et ombrée dans la figure 6.1. Soit $a+h$ un point quelconque de $\mathcal{R}$, on a alors

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + \dots \quad (5)$$

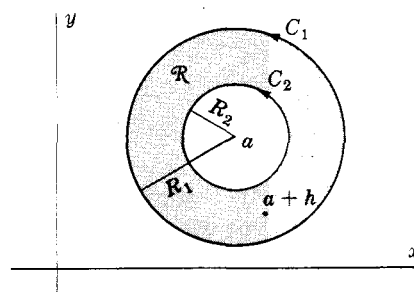


Fig. 6-1

$$\text{où} \quad \left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz & n = 0, 1, 2, \dots \\ a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} f(z) dz & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.

Nous pouvons dans les intégrations ci-dessus remplacer C_1 et C_2 par tout cercle concentrique C situé entre C_1 et C_2 [voir problème 100]. Les coefficients (6) peuvent alors être écrits au moyen de la formule unique

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Avec un changement convenable de notation on peut alors écrire

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots \quad (8)$$

$$\text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et (5) ou (8) avec les coefficients (6), (7) ou (9) est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$ est appelée la partie analytique de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z-a$ est appelé la partie principale. Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

CLASSIFICATION DES SINGULARITES

Il est possible de classer les singularités d'une fonction $f(z)$ par l'examen de sa série de Laurent. Dans ce but nous supposons dans la figure 6.1 que $R_2 = 0$ si bien que $f(z)$ est analytique à l'intérieur de C_1 et sur C_1 excepté en $z = a$ qui est une singularité isolée [voir page 67]. Dans la suite, toutes les singularités seront supposées isolées sauf indication contraire.

1. **Pôles.** Si $f(z)$ à la forme (8) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = a$ est appelé un pôle d'ordre n . Si $n = 1$ on a affaire à un pôle simple.

Si $z = a$ est un pôle de $f(z)$ alors $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ [voir problème 32].

2. **Singularités apparentes.** Si une fonction uniforme $f(z)$ n'est pas définie en $z = a$ mais si $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe, alors $z = a$ est appelée une singularité apparente. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = a$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Exemple : Si $f(z) = \sin z/z$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow 0} \sin z/z = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \sin z/z = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

3. **Singularités essentielles.** Si $f(z)$ est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle. Si $z = a$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une infinité de termes.

Exemple : Le développement de $e^{1/z}$ s'écrivant $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots$, on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle.

Les deux théorèmes suivants sont intéressants (voir problèmes 153-155).

Théorème de Casorati-Weierstrass. Dans tout voisinage d'une singularité essentielle isolée une fonction $f(z)$ analytique (sauf en a) devient aussi voisine qu'on le veut de tout nombre complexe A . En d'autres termes étant donné les nombres positifs quelconques δ et ϵ , et un nombre complexe arbitraire A , il existe une valeur de z intérieure au cercle $|z - a| = \delta$ pour laquelle $|f(z) - A| < \epsilon$.

Théorème de Picard. Dans tout voisinage d'une singularité essentielle isolée a , une fonction $f(z)$ analytique par ailleurs, prend toute valeur complexe avec peut-être une exception.

4. **Points de branchement.** Un point $z = z_0$ est appelé point de branchement de la fonction multiforme $f(z)$ si les branches de $f(z)$ s'échangent quand z décrit un contour fermé autour de z_0 [voir page 37]. Chacune des branches de la fonction multiforme étant analytique tous les théorèmes sur les fonctions analytiques, en particulier le théorème de Taylor, s'appliquent.

Exemple : La branche de $f(z) = z^{1/2}$ qui prend la valeur 1 pour $z = 1$, possède un développement en série de Taylor de la forme $a_0 + a_1(z - 1) + a_2(z - 1)^2 + \dots$ de rayon de convergence $R = 1$ [la distance de $z = 1$ à la singularité la plus proche qui est ici le point de branchement $z = 0$].

5. **Singularités à l'infini.** En posant $z = 1/w$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f(1/w) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple : $f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f(1/w) = 1/w^3$ possède un pôle triple en $z = 0$. De la même façon e^z possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car $F(w) = f(1/w) = e^{1/w}$ a une singularité essentielle en $w = 0$.

FONCTIONS ENTIÈRES

Une fonction qui est analytique en tout point à distance finie [i.e. partout sauf à $z = \infty$] est appelée une fonction entière. Les fonctions e^z , $\sin z$, $\cos z$ sont des fonctions entières.

Une fonction entière peut être représentée par une série de Taylor ayant un rayon de convergence infini. Réciproquement si une série entière a un rayon de convergence infini elle représente une fonction entière.

On remarque que d'après le théorème de Liouville [chapitre 5, page 119] une fonction analytique en tout point (y compris $z = \infty$) est constante.

FONCTIONS MEROMORPHES

Une fonction analytique en tout point à distance finie sauf en un nombre fini de pôles, est appelée une fonction méromorphe.

Exemple : $\frac{z}{(z-1)(z+3)^2}$ qui est analytique en tout point à distance finie sauf en $z = 1$ (pôle simple) et $z = -3$ (pôle double) est une fonction méromorphe.

DEVELOPPEMENT DE LAGRANGE

Soit z la racine de $z = a + \zeta \phi(z)$ qui prend la valeur $z = a$ quand $\zeta = 0$. Alors si $\phi(z)$ est analytique dans et sur un cercle C contenant $z = a$, on a

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{[\phi(a)]^n\} \quad (11)$$

Plus généralement si $F(z)$ est analytique à l'intérieur de C et sur C , on a

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{F'(a) [\phi(a)]^n\} \quad (12)$$

Le développement (12) et le cas particulier (11) sont souvent appelés développements de Lagrange.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Supposons que nous ne connaissions pas de façon précise une fonction analytique $f(z)$ mais seulement son expression à l'intérieur d'un cercle de convergence C , centré en a [Fig. 6-2] sous forme de la série de Taylor

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad (13)$$

En choisissant un point b intérieur à C_1 nous pouvons déterminer la valeur de $f(z)$ et de ses dérivées en b d'après (13) et parvenons ainsi à la nouvelle série

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \dots \quad (14)$$

possédant un cercle de convergence C_2 . Si C_2 s'étend à l'extérieur de C_1 alors les valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées peuvent être obtenues dans cette nouvelle région et nous avons ainsi obtenu plus de renseignements sur $f(z)$.

On dit dans ce cas que $f(z)$ a été prolongé analytiquement au-delà de C_1 et l'on appelle ce procédé le prolongement analytique.

Le procédé en question peut naturellement être répété indéfiniment. Ainsi choisissant un point c intérieur à C_2 nous aboutissons à une nouvelle série de cercles de convergence C_3 qui peut s'étendre au-delà de C_1 et C_2 , etc.

L'ensemble de toutes ces représentations sous forme de séries entières, i.e. tous les prolongements analytiques possibles, est défini comme étant la fonction analytique $f(z)$ et chacune de ces séries entières est quelquefois appelée un élément de $f(z)$.

En effectuant des prolongements analytiques nous devons éviter les singularités. Par exemple il ne peut y avoir de singularité dans la figure 6-2 qui soit à la fois à l'intérieur de C_2 et sur la frontière de C_1 , sinon (14) divergerait en ce point. Dans certains cas les singularités sur le cercle de convergence sont si nombreuses que tout prolongement analytique est impossible. Dans ces cas la frontière du cercle est appelée une frontière naturelle [voir problème 30]. Les fonctions représentées par des séries possédant des frontières naturelles sont appelées fonctions lacunaires.

En passant du cercle C_1 au cercle C_n [Fig. 6-2] nous avons choisi une trajectoire des centres $a, b, c, \dots, p$ que nous appellerons contour P_1 . D'autres contours peuvent également être choisis e.g. $a, b', c', \dots, p$ noté contour P_2 . Une question se pose de savoir si l'on obtient la même représentation en série entière, valable à l'intérieur de C_n si l'on choisit des contours différents. La réponse est oui dans la mesure où la région bornée par P_1 et P_2 ne possède pas de singularité.

Pour une discussion plus complète du prolongement analytique, voir Chapitre 10.

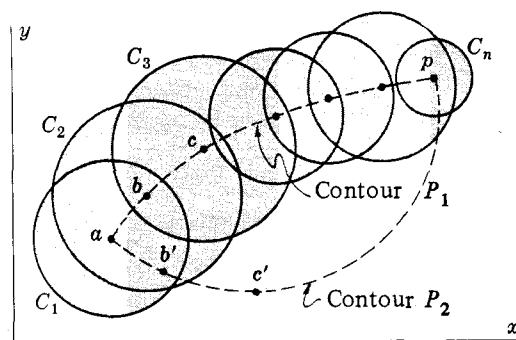


Fig. 6-2

Problèmes résolus

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

1. Démontrer à l'aide de la définition, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1$ pour tout z .

Etant donné $\epsilon > 0$, nous devons trouver N tel que $|1 + z/n - 1| < \epsilon$ pour $n > N$. Alors $|z/n| < \epsilon$, i.e. $|z|/n < \epsilon$ si $n > |z|/\epsilon = N$.

2. (a) Démontrer que la série $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$ converge pour $|z| < 1$ et
 (b) trouver sa somme.

La somme des n premiers termes de la série est

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z) + z^2(1-z) + \dots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1} \end{aligned}$$

D'autre part $|S_n(z) - z| = |-z^{n+1}| = |z|^{n+1} < \epsilon$ pour $(n+1)\text{Log}|z| < \text{Log } \epsilon$, i.e. $n+1 > \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}|z|}$ ou
 $n > \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}|z|} - 1$ si $z \neq 0$.

Si $z = 0$, $S_n(0) = 0$ et $|S_n(0) - 0| < \epsilon$ pour tout n .

On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = z$, qui est la somme demandée pour tout z tel que $|z| < 1$.

Autre méthode

De $S_n(z) = z - z^{n+1}$, on tire [d'après le problème 41, Chapitre 2 dans lequel nous avons montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ si $|z| < 1$],

$$\text{Somme demandée} = S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z - z^{n+1}) = z$$

CONVERGENCE ABSOLUE, CONVERGENCE UNIFORME

3. (a) Démontrer que la série du problème 2 converge uniformément vers la somme z pour $|z| \leq \frac{1}{2}$.
 (b) La série converge-t-elle uniformément pour $|z| \leq 1$? Expliquer.

(a) Dans le problème 2 nous avons montré que $|S_n(z) - z| < \epsilon$ pour tout $n > \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}|z|} - 1$, i.e. la série converge vers la somme z pour $|z| < 1$ et donc pour $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Si $|z| \leq \frac{1}{2}$ la plus grande valeur de $\frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}|z|} - 1$ est obtenue pour $|z| = \frac{1}{2}$ et est donnée par $\frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}(1/2)} - 1 = N$. On en déduit que $|S_n(z) - z| < \epsilon$ pour tout $n > N$ dépend seulement de ϵ et non de la valeur particulière de z dans $|z| \leq \frac{1}{2}$. La série converge donc uniformément vers z pour $|z| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Le même argument que celui donné dans la partie (a) peut servir à montrer que la série converge uniformément vers sa somme z pour $|z| \leq 0,9$ ou $|z| \leq 0,99$ en utilisant respectivement $N = \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}(0,9)} - 1$ et $N = \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}(0,99)} - 1$.

Cependant il est clair que nous ne pouvons étendre ce raisonnement à $|z| \leq 1$ car il faudrait utiliser $N = \frac{\text{Log } \epsilon}{\text{Log}1} - 1$ qui est infini, i.e. il n'existe pas de valeur finie de N qui puisse être utilisée dans ce cas.

La série ne converge donc pas uniformément pour $|z| \leq 1$.

4. (a) Démontrer que la suite $\left\{ \frac{1}{1+nz} \right\}$ converge uniformément vers zéro pour tout z tel que $|z| \geq 2$. (b) Le domaine de convergence uniforme de (a) peut-il être étendu? Expliquer.

(a) Nous avons $\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon$ quand $\frac{1}{|1+nz|} < \epsilon$ ou $|1+nz| > 1/\epsilon$. D'autre part $|1+nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z|$ et $1 + n|z| \geq |1+nz| > 1/\epsilon$ pour $n > \frac{1/\epsilon - 1}{|z|}$. La suite converge donc vers zéro pour $|z| > 2$.

Pour déterminer si elle converge uniformément vers zéro, remarquons que la plus grande valeur de $\frac{1/\epsilon - 1}{|z|}$ dans $|z| \geq 2$ est obtenue pour $z = 2$ et est donnée par $\frac{1}{2}\{(1/\epsilon) - 1\} = N$. On en déduit que $\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon$ pour tout $n > N$ où N dépend seulement de ϵ et non de la valeur particulière de z tel que $|z| \geq 2$. La suite est donc uniformément convergente dans ce domaine.

- (b) Si δ est un nombre positif quelconque, la plus grande valeur de $\frac{(1/\epsilon) - 1}{|z|}$ dans $|z| \geq \delta$ est obtenue pour $|z| = \delta$ et sa valeur est $\frac{(1/\epsilon) - 1}{\delta}$. Comme dans la partie (a) on en déduit que la suite converge uniformément vers zéro pour tout z tel que $|z| \geq \delta$, i.e. dans toute région excluant tous les points d'un voisinage de $z = 0$.

Comme δ peut être choisi arbitrairement proche de zéro on en conclut que la région de (a) peut être considérablement étendue.

5. Montrer que (a) la fonction somme du problème 2 est discontinue en $z = 1$, (b) la limite dans le problème 4 est discontinue en $z = 0$.

(a) D'après le problème 2, $S_n(z) = z - z^{n+1}$, $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$. Si $|z| < 1$, $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = z$.

Si $z = 1$, $S_n(z) = S_n(1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = 0$. Ainsi $S(z)$ est donc discontinue en $z = 1$.

(b) D'après le problème 4 si l'on écrit $u_n(z) = \frac{1}{1+nz}$ et $U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)$ nous avons $U(z) = 0$ si $z \neq 0$ et 1 si $z = 0$. $U(z)$ est donc discontinue en $z = 0$.

Ces résultats sont des conséquences du fait [voir problème 16] que si une série de fonctions continues converge uniformément dans une région α , alors la fonction somme est continue dans α . Dans ces conditions si la fonction somme n'est pas continue, la série ne peut pas converger uniformément. Un résultat semblable est valable pour des suites.

6. Montrer que la série du problème 2 est absolument convergente pour $|z| < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad T_n(z) &= |z(1-z)| + |z^2(1-z)| + \cdots + |z^n(1-z)| \\ &= |1-z| \{ |z| + |z|^2 + |z|^3 + \cdots + |z|^n \} \\ &= |1-z| |z| \left\{ \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \right\} \end{aligned}$$

Si $|z| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z)$ existe si bien que la série converge absolument.

On remarquera que la série des valeurs absolues converge dans ce cas vers $\frac{|1-z||z|}{1-|z|}$.

CRITERES PARTICULIERS DE CONVERGENCE

7. Si $\sum |v_n|$ converge et si $|u_n| \leq |v_n|$, $n = 1, 2, 3, \dots$, démontrer que $\sum |u_n|$ converge également (i.e. établir le critère de comparaison).

Soit $S_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|$, $T_n = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$.

Puisque $\sum |v_n|$ converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ existe et soit T cette limite. Alors comme $|v_n| \geq 0$, $T_n \leq T$.

D'où $S_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \leq |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \leq T$ ou $0 \leq S_n \leq T$.

Dans ces conditions S_n est une suite monotone croissante et bornée, elle a donc une limite [Théorème 3, page 141] i.e. $\sum |u_n|$ converge.

8. Démontrer que $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge quel que soit $p > 1$.

Nous avons $\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1^{p-1}}$

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \leq \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}$$

etc., où nous considérons 1, 2, 4, 8, ... termes de la série. On en déduit que la somme d'un nombre fini de termes de la série donnée est inférieure à la série géométrique

$$\frac{1}{1^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \dots = \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}}$$

qui converge pour $p > 1$. La série donnée converge donc.

Par une méthode analogue à celle utilisée ici, à l'aide du critère de comparaison pour la divergence [Théorème 10(b) page 141], nous pouvons montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge pour $p \leq 1$.

9. Démontrer qu'une série absolument convergente, est convergente.

Supposons que $\sum |u_n|$ converge, montrons que $\sum u_n$ converge.

Soit $S_M = u_1 + u_2 + \dots + u_M$ et $T_M = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_M|$. Alors

$$\begin{aligned} S_M + T_M &= (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_M + |u_M|) \\ &\leq 2|u_1| + 2|u_2| + \dots + 2|u_M| \end{aligned}$$

Puisque $\sum |u_n|$ converge et que $u_n + |u_n| \geq 0$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on en déduit que $S_M + T_M$ est une suite bornée monotone croissante et donc $\lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M)$ existe.

Comme $\lim_{M \rightarrow \infty} T_M$ existe [car par hypothèse la série est absolument convergente],

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M - T_M) = \lim_{M \rightarrow \infty} (S_M + T_M) - \lim_{M \rightarrow \infty} T_M$$

existe également ce qui démontre le théorème.

10. Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ converge (absolument) pour $|z| \leq 1$.

Si $|z| \leq 1$, alors $\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$.

Considérant $u_n = \frac{z^n}{n(n+1)}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ dans le critère de comparaison et utilisant le fait que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge [problème 8 avec $p = 2$] nous voyons que $\sum |u_n|$ converge, i.e. $\sum u_n$ converge absolument.

11. Démontrer le critère de d'Alembert.

Nous devons montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, alors $\sum |u_n|$ converge ou, d'après le problème 9, $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

Par hypothèse nous pouvons choisir un entier N suffisamment grand pour que $n \geq N$ entraîne $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq r$ où r est une constante telle que $L < r < 1$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{N+1}| &\leq r |u_N| \\ |u_{N+2}| &\leq r |u_{N+1}| < r^2 |u_N| \\ |u_{N+3}| &\leq r |u_{N+2}| < r^3 |u_N| \end{aligned}$$

etc. Par addition,

$$|u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots \leq |u_N| (r + r^2 + r^3 + \dots)$$

et donc $\sum |u_n|$ converge d'après le critère de comparaison car $0 < r < 1$.

12. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$.

Si $u_n = \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$, alors $u_{n+1} = \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}$. D'où en excluant la valeur $z = 2$ pour laquelle la série converge, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2)}{4} \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} \right| = \frac{|z+2|}{4}$$

La série converge donc (absolument) pour $\frac{|z+2|}{4} < 1$, i.e. $|z+2| < 4$.

Le point $z = -2$ vérifie la condition $|z+2| < 4$.

Si $\frac{|z+2|}{4} = 1$, i.e. $|z+2| = 4$, le critère de d'Alembert ne s'applique plus. Toutefois on peut voir que dans ce cas

$$\left| \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \right| = \frac{1}{4(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

et comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge [série $\sum \frac{1}{n^p}$ avec $p = 3$] la série considérée converge absolument.

On en déduit que la série donnée converge (absolument) pour $|z+2| \leq 4$. Géométriquement on obtient ainsi l'ensemble de tous les points intérieurs au cercle de rayon 4 centré en $z = -2$ ou situés sur ce cercle ; ce cercle est appelé le cercle de convergence [ombré dans la figure 6-3]. Le rayon de convergence est égal à 4.

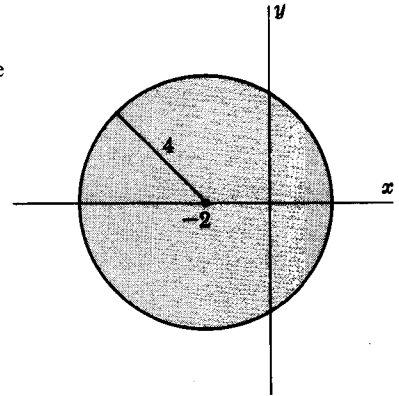


Fig. 6-3

13. Déterminer le domaine de convergence des séries (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

(a) Si $u_n = \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, alors $u_{n+1} = \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. D'où si l'on ne tient pas compte de la valeur

$z = 0$, valeur pour laquelle la série converge, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{z^2 (2n-1)!}{(2n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)! |z|^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n)} = 0 \end{aligned}$$

pour tout z fini. La série converge donc (absolument) quel que soit z , ce que l'on traduit en disant la série converge pour $|z| < \infty$. De façon équivalente on peut dire que le cercle de convergence est infini ou que le rayon de convergence est infini.

(b) Si $u_n = n! z^n$, $u_{n+1} = (n+1)! z^{n+1}$. En excluant $z = 0$ valeur pour laquelle la série donnée converge, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |z| = \infty$$

La série converge donc seulement pour $z = 0$.

THEOREMES SUR LA CONVERGENCE UNIFORME

14. Démontrer le critère de Weierstrass, i.e. si dans une région $\mathcal{R}$, $|u_n(z)| \leq M_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, où les M_n sont constantes positives telles que $\sum M_n$ converge, alors $\sum u_n(z)$ est uniformément (et absolument) convergente dans $\mathcal{R}$.

Le reste d'ordre n de la série $\sum u_n(z)$ est $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots$. De plus

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots| \leq |u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + \dots \\ &\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Mais $M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$ peut être rendu inférieur à ϵ en choisissant $n > N$, car $\sum M_n$ converge. N étant visiblement indépendant de z , nous avons $|R_n(z)| < \epsilon$ pour $n > N$, et la série est uniformément convergente. La convergence absolue s'obtient au moyen du critère de comparaison.

15. Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées ?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}, \quad |z| \leq 1; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}, \quad 1 < |z| < 2; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}, \quad |z| \leq 1.$$

(a) Si $u_n(z) = \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, alors $|u_n(z)| = \frac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ si $|z| \leq 1$. En posant $M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, nous voyons que $\sum M_n$ converge (série du type $1/n^p$ avec $p = 3/2$). D'après le critère de Weierstrass la série converge donc uniformément (et absolument) pour $|z| \leq 1$.

(b) La série donnée est $\frac{1}{1^2 + z^2} + \frac{1}{2^2 + z^2} + \frac{1}{3^2 + z^2} + \dots$. On peut omettre les deux premiers termes sans changer pour cela la nature de la série du point de vue convergence uniforme. Pour $n \geq 3$ et $1 < |z| < 2$, nous avons

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| \geq n^2 - 4 \geq \frac{1}{2}n^2 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

La série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ étant convergente, on en déduit d'après le critère de Weierstrass (avec $M_n = 2/n^2$) que la série donnée converge absolument et uniformément pour $1 < |z| < 2$.

On remarquera que la convergence, et donc la convergence uniforme, n'existe plus pour $|z| = 1$ ou $|z| = 2$ [plus précisément en $z = \pm i$ et $z = \pm 2i$]. La série ne peut donc pas converger uniformément pour $1 \leq |z| \leq 2$.

(c) Si $z = x + iy$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\cos nz}{n^3} &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2n^3} = \frac{e^{inx-ny} + e^{-inx+ny}}{2n^3} \\ &= \frac{e^{-ny}(\cos nx + i \sin nx)}{2n^3} + \frac{e^{ny}(\cos nx - i \sin nx)}{2n^3} \end{aligned}$$

Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ny}(\cos nx - i \sin nx)}{2n^3}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}(\cos nx + i \sin nx)}{2n^3}$ ne peuvent converger respectivement pour $y > 0$ et $y < 0$ [car dans ces cas le terme général ne tend pas vers zéro]. La série ne peut donc pas converger pour $|z| \leq 1$ et a fortiori n'est pas uniformément convergente dans cette région.

La série converge pour $y = 0$, i.e. si z est réel. Dans ce cas $z = x$ et la série s'écrit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Alors de l'inégalité $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ et du fait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, on déduit d'après le critère de Weierstrass (avec $M_n = 1/n^3$) que la série donnée converge uniformément sur tout intervalle de l'axe réel.

16. Démontrer le théorème 18, page 142, i.e. si $u_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, est continue quel que soit n , pour z appartenant à $\mathcal{R}$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformément vers $S(z)$ dans $\mathcal{R}$ alors $S(z)$ est continue dans $\mathcal{R}$.

Si $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z)$, et si $R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots$ désigne le reste d'ordre n , il est clair que

$$S(z) = S_n(z) + R_n(z) \quad \text{et} \quad S(z+h) = S_n(z+h) + R_n(z+h)$$

et donc

$$S(z+h) - S(z) = S_n(z+h) - S_n(z) + R_n(z+h) - R_n(z) \quad (1)$$

où z et $z+h$ sont dans $\mathcal{R}$.

$S_n(z)$ désignant la somme d'un nombre fini de fonctions continues, est continue. Alors étant donné $\epsilon > 0$ nous pouvons déterminer δ tel que

$$|S_n(z+h) - S_n(z)| < \epsilon/3 \quad \text{pour} \quad |h| < \delta \quad (2)$$

La série étant par hypothèse uniformément convergente on peut trouver N tel que pour tout z dans $\mathcal{R}$.

$$|R_n(z)| < \epsilon/3 \quad \text{et} \quad |R_n(z+h)| < \epsilon/3 \quad \text{pour} \quad n > N \quad (3)$$

Alors de (1), (2) et (3),

$$|S(z+h) - S(z)| \leq |S_n(z+h) - S_n(z)| + |R_n(z+h)| + |R_n(z)| < \epsilon$$

pour $|h| < \delta$ et tout z dans $\mathcal{R}$, ce qui établit la continuité.

17. Démontrer le théorème 19, page 142, i.e. si $\{u_n(z)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, est un ensemble de fonctions continues dans $\mathcal{R}$, si $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$ et si C est une courbe de $\mathcal{R}$, alors

$$\int_C S(z) dz = \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z) dz$$

Comme dans le problème 16, nous avons $S(z) = S_n(z) + R_n(z)$ et ces fonctions étant continues dans $\mathcal{a}$ [d'après le problème 16] leurs intégrales existent, i.e.

$$\begin{aligned} \int_C S(z) dz &= \int_C S_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz \\ &= \int_C u_1(z) dz + \int_C u_2(z) dz + \dots + \int_C u_n(z) dz + \int_C R_n(z) dz \end{aligned}$$

Par hypothèse la série est uniformément convergente si bien que pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver un nombre N indépendant de z dans $\mathcal{a}$ tel que $|R_n(z)| < \epsilon$ pour $n > N$. Si l'on désigne par L la longueur de C nous avons [d'après la propriété 5, page 93]

$$\left| \int_C R_n(z) dz \right| < \epsilon L$$

D'où $\left| \int_C S(z) dz - \int_C S_n(z) dz \right|$ peut être rendu aussi petit qu'on le désire en choisissant n suffisamment grand, ce qui démontre le résultat.

THEOREMES SUR LES SERIES ENTIERES

18. Si une série entière $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0 \neq 0$, montrer qu'elle converge (a) absolument pour $|z| < |z_0|$, (b) uniformément pour $|z| \leq |z_1|$ où $|z_1| < |z_0|$.

(a) La série $\sum a_n z_0^n$ étant convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$ et l'on a $|a_n z_0^n| < 1$ pour n suffisamment grand, i.e.

$$|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n} \text{ pour } n > N. \text{ Alors}$$

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \quad (1)$$

Mais la dernière série de (1) converge pour $|z| < |z_0|$ et donc d'après le critère de comparaison la première série converge également, i.e. la série donnée est absolument convergente.

(b) Soit $M_n = \frac{|z_1|^n}{|z_0|^n}$. La série $\sum M_n$ converge car $|z_1| < |z_0|$. Comme dans (a), $|a_n z_n| < M_n$ pour $z \leq z_1$ et donc d'après le critère de Weierstrass, $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente.

On en déduit qu'une série entière est uniformément convergente dans tout compact situé dans l'intérieur du cercle de convergence

19. Démontrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Désignons par $R > 0$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Soit $0 < |z_0| < R$, d'après le problème 18 nous pouvons choisir N tel que $|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n}$ pour $n > N$.

Les termes de la série $\sum |n a_n z^{n-1}| = \sum n |a_n| |z|^{n-1}$ peuvent donc pour $n > N$ être rendus inférieurs aux termes correspondants de la série $\sum n \frac{|z|^{n-1}}{|z_0|^n}$ qui converge d'après le critère de comparaison pour $|z| < |z_0| < R$.

La série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge donc absolument pour tous les points tels que $|z| < |z_0|$ (aussi près que $|z_0|$ soit de R), i.e. pour $|z| < R$.

Si toutefois $|z| > R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n \neq 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$, dans ces conditions $\sum n a_n z^{n-1}$ ne converge pas.

R est donc le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$. Ceci est également vrai si $R = 0$.

On notera que la série des dérivées peut converger ou non pour des valeurs de z telles que $|z| = R$.

20. Démontrer que dans tout compact situé entièrement à l'intérieur du cercle de convergence, une série entière (a) représente une fonction continue notée $f(z)$, (b) peut être intégrée terme à terme pour obtenir l'intégrale de $f(z)$, (c) peut être dérivée terme à terme pour obtenir la dérivée de $f(z)$.

Nous considérerons la série entière $\sum a_n z^n$ bien que des résultats analogues soient également vrais pour $\sum a_n (z-a)^n$.

- (a) C'est une conséquence du problème 16 et du fait que chaque terme $a_n z^n$ est continu.
 (b) C'est une conséquence du problème 17 et du fait que chacun des termes $a_n z^n$ de la série est continu et donc intégrable.
 (c) D'après le problème 19 la dérivée d'une série entière converge dans le même cercle de convergence que la série initiale et donc est uniformément convergente dans tout compact entièrement situé à l'intérieur du cercle de convergence. On déduit alors le résultat cherché du théorème 20, page 142.

21. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a une valeur finie en tout point intérieur à son cercle de convergence ou sur celui-ci, mais que ce n'est pas vrai pour la série dérivée.

D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|z^n/n^2| = 1/n^2$ et la série est convergente (absolument). La série converge donc pour $|z| \leq 1$ et a donc une valeur finie à l'intérieur du cercle de convergence et sur celui-ci.

La série des dérivées est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$. D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $|z| < 1$. Toutefois la série ne converge pas pour tout z tel que $|z| = 1$, par exemple si $z = 1$ la série diverge.

THEOREME DE TAYLOR

22. Démontrer le théorème de Taylor : si $f(z)$ est analytique à l'intérieur du cercle C centré en a , alors pour tout z intérieur à C ,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \dots$$

Soit z un point quelconque intérieur à C . Construisons un cercle C_1 centré en a et entourant z (voir figure 6.4). Alors d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (1)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{(w-a)} \left\{ \frac{1}{1 - (z-a)/(w-a)} \right\} \\ &= \frac{1}{(w-a)} \left\{ 1 + \left(\frac{z-a}{w-a} \right) + \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \frac{1}{1 - (z-a)/(w-a)} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \frac{1}{w-z} \quad (2)$$

En multipliant les deux membres de (2) par $f(w)$ et en utilisant (1) on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + \frac{z-a}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw + U_n \quad (3)$$

$$\text{où} \quad U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

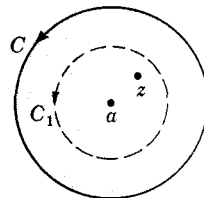


Fig. 6-4

D'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(3) devient

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + U_n$$

Si nous pouvons montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ nous aurons démontré le théorème considéré. Pour cela remarquons que w étant sur C_1 ,

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \gamma < 1$$

où γ est une constante. Nous avons également $|f(w)| < M$ où M est une constante, et

$$|w-z| = |(w-a) - (z-a)| \geq r_1 - |z-a|$$

r_1 étant le rayon de C_1 . Alors d'après la propriété 5, page 93, nous avons

$$\begin{aligned} |U_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma^n M}{r_1 - |z-a|} \cdot 2\pi r_1 = \frac{\gamma^n M r_1}{r_1 - |z-a|} \end{aligned}$$

et nous voyons que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ ce qui complète la démonstration.

23. Soit $f(z) = \text{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$.
 (a) Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$. (b) Déterminer le domaine de convergence de la série de (a). (c) Développer $\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

(a)	$\begin{aligned} f(z) &= \text{Log}(1+z) \\ f'(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} \\ f''(z) &= -(1+z)^{-2} \\ f'''(z) &= (-1)(-2)(1+z)^{-3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(z) &= (-1)^n n! (1+z)^{-(n+1)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 2! \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(0) &= (-1)^n n! \end{aligned}$
-----	---	--

Alors

$$\begin{aligned} f(z) = \text{Log}(1+z) &= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Autre méthode. Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

On obtient alors par intégration entre 0 et z

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

- (b) Le n -ième terme est $u_n = \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. D'après le critère de d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nz}{n+1} \right| = |z|$$

et la série converge pour $|z| < 1$. On peut montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = -1$.

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e. $z = -1$) de $f(z)$.

(c) D'après le résultat de (a) nous avons en remplaçant z par $-z$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\operatorname{Log}(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \dots$$

les deux séries ci-dessus convergent pour $|z| < 1$. Par soustraction, nous avons

$$\operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

qui converge pour $|z| < 1$. On peut aussi montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = \pm 1$.

24. (a) Développer $f(z) = \sin z$ en série de Taylor au voisinage de $z = \pi/4$ et (b) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

$$(a) \quad f(z) = \sin z, \quad f'(z) = \cos z, \quad f''(z) = -\sin z, \quad f'''(z) = -\cos z, \quad f^{IV}(z) = \sin z, \dots$$

$$f(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2, \quad f'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2, \quad f^{IV}(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \dots$$

D'où, avec $a = \pi/4$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}(z-\pi/4)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}(z-\pi/4)^3 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Autre méthode.

Soit $u = z - \pi/4$ ou $z = u + \pi/4$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(u + \pi/4) = \sin u \cos(\pi/4) + \cos u \sin(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin u + \cos u) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \dots \right\} \end{aligned}$$

(b) La singularité de $\sin z$ la plus proche de $\pi/4$ est à l'infini, la série converge donc pour toutes les valeurs finies de z , i.e. $|z| < \infty$. Ceci peut aussi être établi par la critère de d'Alembert.

THEOREME DE LAURENT

25. Démontrer le théorème de Laurent. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur de la couronne circulaire $\mathcal{R}$ limitée par les cercles concentriques C_1 et C_2 (centrés en a , de rayons respectifs r_1 et r_2 , $r_2 > r_1$) si de plus $f(z)$ est analytique sur C_1 et C_2 , alors pour tout z dans $\mathcal{R}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'après la formule intégrale de Cauchy [voir problème 23, page 131] nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (1)$$

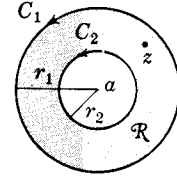


Fig. 6-5

Considérons la première intégrale de (1). Comme dans l'équation (2) du problème 22, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)\{1-(z-a)/(w-a)\}} \\ &= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Si bien que } \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + \frac{z-a}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw \\ &\quad + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw + U_n \\ &= a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n \end{aligned} \quad (3)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw, \quad \dots, \quad a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw$$

et

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Considérons maintenant la deuxième intégrale de (1). Nous avons en échangeant w et z dans (2),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(z-a)\{1-(w-a)/(z-a)\}} \\ &= \frac{1}{z-a} + \frac{w-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{1}{z-w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si bien que } -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{z-a} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{w-a}{(z-a)^2} f(w) dw \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} f(w) dw + V_n \\ &= \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + V_n \end{aligned} \quad (4)$$

où

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(w) dw, \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (w-a) f(w) dw, \quad \dots, \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (w-a)^{n-1} f(w) dw$$

et

$$V_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{z-w} dw$$

De (1), (3) et (4) nous tirons

$$\begin{aligned} f(z) &= \{a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{n-1}(z-a)^{n-1}\} \\ &\quad + \left\{ \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \right\} + U_n + V_n \end{aligned} \quad (5)$$

On obtiendra le résultat demandé en montrant que (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ et (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$. La démonstration de (a) se réduit du problème 22. Pour démontrer (b) nous devons d'abord noter que w étant sur C_2 ,

$$\left| \frac{w-a}{z-a} \right| = \kappa < 1$$

où κ est une constante. De même nous avons $|f(w)| < M$ où M est une constante et

$$|z-w| = |(z-a) - (w-a)| \geq |z-a| - r_2$$

Alors d'après la propriété 5, page 83, nous avons

$$\begin{aligned} |V_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C_2} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n \frac{f(w)}{z-w} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa^n M}{|z-a| - r_2} 2\pi r_2 = \frac{\kappa^n M r_2}{|z-a| - r_2} \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$, ce qui complète la démonstration.

26. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

(a) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z=1$. Soit $z-1=u$. Alors $z=1+u$ et

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3} \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right\} \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \dots \end{aligned}$$

$z=1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple.

La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

(b) $(z-3) \sin \frac{1}{z+2}$; $z=-2$. On pose $z+2=u$ ou $z=u-2$. D'où

$$\begin{aligned} (z-3) \sin \frac{1}{z+2} &= (u-5) \sin \frac{1}{u} = (u-5) \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{3! u^3} + \frac{1}{5! u^5} - \dots \right\} \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3! u^2} + \frac{5}{3! u^3} + \frac{1}{5! u^4} - \dots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \dots \end{aligned}$$

$z=-2$ est une singularité essentielle (point singulier essentiel)

(c) $\frac{z - \sin z}{z^3}$; $z=0$.

$$\begin{aligned} \frac{z - \sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left\{ z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \right\} \\ &= \frac{1}{z^3} \left\{ \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots \right\} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots \approx \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$z=0$ est une singularité apparente.

La série converge quel que soit z .

(d) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z=-2$. Soit $z+2=u$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u} (1+u+u^2+u^3+\dots) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \dots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

$z=-2$ est un pôle simple.

La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z+2| < 1$.

(e) $\frac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z=3$. Soit $z-3=u$; alors d'après le développement du binôme,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-3)^2} &= \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{9u^2(1+u/3)^2} \\
&= \frac{1}{9u^2} \left\{ 1 + (-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \dots \\
&= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \dots
\end{aligned}$$

$z = 3$ est un pôle d'ordre 2 ou pôle double.

La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z-3| < 3$.

27. Développer $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour (a) $1 < |z| < 3$, (b) $|z| > 3$, (c) $0 < |z+1| < 2$, (d) $|z| < 1$.

(a) Par décomposition de $f(z)$ en éléments simples on obtient $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$.

Si $|z| > 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z(1+1/z)} = \frac{1}{2z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

If $|z| < 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+z/3)} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \dots \right) = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \dots$$

Le développement demandé valable à la fois pour $|z| > 1$ et $|z| < 3$, i.e. $1 < |z| < 3$, est

$$\dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \dots$$

(b) Si $|z| > 1$, nous avons comme dans (a)

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2z(1+3/z)} = \frac{1}{2z} \left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \dots \right) = \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{9}{2z^3} - \frac{27}{2z^4} + \dots$$

Le développement en série de Laurent demandé, valable à la fois pour $|z| > 1$ et $|z| > 3$, i.e. $|z| > 3$, s'obtient par soustraction

$$\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

(c) Soit $z+1 = u$. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} = \frac{1}{2u} \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \dots
\end{aligned}$$

valable pour $|u| < 2$, $u \neq 0$ ou $0 < |z+1| < 2$.

(d) Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2}(1 - z + z^2 - z^3 + \dots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3 + \dots$$

Si $|z| < 3$, nous avons d'après la partie (a)

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \dots$$

Le développement demandé, valable à la fois pour $|z| < 1$ et $|z| < 3$, i.e. $|z| < 1$, est obtenu par soustraction

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

C'est une série de Taylor.

DEVELOPPEMENT DE LAGRANGE

28. Démontrer la formule (11) page 145, du développement de Lagrange.

On suppose que C est choisi de façon qu'il n'y ait qu'un seul zéro simple de $z = a + \zeta \phi(z)$ à l'intérieur de C . Alors d'après le problème 90, page 137, avec $g(z) = z$ et $f(z) = z - a - \zeta \phi(z)$, nous avons

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C w \left\{ \frac{1 - \zeta \phi'(w)}{w - a - \zeta \phi(w)} \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w}{w-a} \{1 - \zeta \phi'(w)\} \left\{ \frac{1}{1 - \zeta \phi(w)/(w-a)} \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w}{w-a} \{1 - \zeta \phi'(w)\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \phi^n(w)/(w-a)^n \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{w}{w-a} dw + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{w \phi^n(w)}{(w-a)^{n+1}} - \frac{w \phi^{n-1}(w) \phi'(w)}{(w-a)^n} \right\} dw \\ &= a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2\pi i} \oint_C \frac{w}{n} \frac{d}{dw} \left\{ \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} \right\} dw \\ &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2\pi i n} \oint_C \frac{\phi^n(w)}{(w-a)^n} dw \\ &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\phi^n(a)] \end{aligned}$$

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

29. Montrer que les séries (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ et (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

(a) D'après le critère de d'Alembert, la série converge pour $|z| < 2$ [région ombrée dans la figure 6.6]. Dans ce cercle la série [qui est une série géométrique de premier terme $1/2$ et de raison $z/2$] est convergente et représente la fonction $\frac{1/2}{1 - z/2} = \frac{1}{2-z}$.

(b) D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $\left| \frac{z-i}{2-i} \right| < 1$, i.e. $|z-i| < \sqrt{5}$, [voir figure 6.6]. Dans ce cercle la série [qui est une série géométrique de premier terme $1/(2-i)$ et de raison $(z-i)/(2-i)$] converge et représente la fonction

$$\frac{1/(2-i)}{1 - (z-i)/(2-i)} = \frac{1}{2-z}.$$

Les séries entières représentent la même fonction dans la partie commune aux deux domaines de convergence limités par les cercles $|z| = 2$ et $|z-i| = \sqrt{5}$ on en déduit que chacune est un prolongement analytique de l'autre.

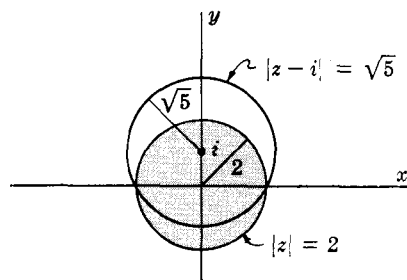


Fig. 6-6

30. Démontrer que la série $1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ne peut être prolongée analytiquement au-delà de $|z| = 1$.

Soit $F(z) = 1 + z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$. D'où $F(z) = z + F(z^2)$, $F(z) = z + z^2 + F(z^4)$, $F(z) = z + z^2 + z^4 + F(z^8), \dots$

Il est alors évident que les valeurs de z définies par $z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, z^8 = 1, \dots$ sont toutes des singularités de $F(z)$. Ces singularités appartiennent toutes au cercle $|z| = 1$. Sur tout arc de ce cercle aussi petit soit-il, il y a une infinité de telles singularités. Ceci constitue une frontière infranchissable et le prolongement analytique au-delà de $|z| = 1$ est impossible. Le cercle $|z| = 1$ constitue une frontière naturelle.

PROBLEMES DIVERS

31. On considère la suite $\{f_k(z)\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ de fonctions analytiques dans un domaine $\mathcal{R}$. On suppose que

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$. Démontrer que $F(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

Soit $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$. D'après la définition de la convergence uniforme pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver un nombre entier N dépendant de ϵ et non de z tel que pour tout z dans $\mathcal{R}$,

$$|F(z) - S_n(z)| < \epsilon \quad \text{pour tout } n > N \quad (1)$$

Supposons maintenant que C est une courbe fermée simple quelconque située entièrement dans $\mathcal{R}$ et appelons L sa longueur. Alors d'après le problème 16, les fonctions $f_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ étant continues il en est de même de $F(z)$ et $\oint_C F(z) dz$ existe. Alors d'après (1) nous voyons que pour $n > N$,

$$\left| \oint_C F(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_C f_k(z) dz \right| = \left| \oint_C \{F(z) - S_n(z)\} dz \right| < \epsilon L$$

On peut prendre ϵ aussi petit que l'on veut, on a donc

$$\oint_C F(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_C f_k(z) dz$$

Mais d'après le théorème de Cauchy $\oint_C f_k(z) dz = 0$. D'où

$$\oint_C F(z) dz = 0$$

et donc d'après le théorème de Morera (page 118, chapitre 5) $F(z)$ est analytique.

32. Démontrer qu'une fonction analytique ne peut être bornée au voisinage d'une singularité isolée.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un cercle C et sur C , à l'exception d'une singularité isolée $z = a$ centre de C . Soit r le rayon de C . Alors d'après le théorème de Laurent $f(z)$ admet un développement en série de Laurent de la forme

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (1)$$

où les coefficients a_k sont donnés par l'équation (7), page 144. En particulier

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}} dz \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

D'autre part si $|f(z)| < M$ où M est une constante, i.e. si $f(z)$ est bornée, alors de (2)

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C (z-a)^{n-1} f(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \cdot M \cdot 2\pi r = Mr^n \end{aligned}$$

Alors comme r peut être pris arbitrairement petit, nous avons $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, i.e. $a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \dots = 0$ et la série de Laurent se réduit à une série de Taylor au voisinage de $z = a$. Ceci montre que $f(z)$ est analytique en $z = a$ et $z = a$ n'est donc pas une singularité contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que $f(z)$ ne peut être bornée dans le voisinage d'une singularité isolée.

33. Démontrer que si $z \neq 0$, alors

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n$$

où

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \sin \theta) d\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Le point $z = 0$ est la seule singularité à distance finie de la fonction $e^{\frac{1}{2}\alpha(z-1/z)}$, le développement en série de Laurent de celle-ci sera donc de la forme

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n \quad (1)$$

qui est valable pour $|z| > 0$. D'après l'équation (7) page 144, les coefficients $J_n(\alpha)$ sont donnés par

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(z-1/z)}}{z^{n+1}} dz \quad (2)$$

où C est une courbe fermée simple entourant $z = 0$.

Choisissons en particulier pour courbe C , un cercle de rayon 1 centré à l'origine ; i.e. l'équation de C est $|z| = 1$ ou $z = e^{i\theta}$. L'équation (2) devient dans ces conditions

$$\begin{aligned} J_n(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha \sin \theta - in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha \sin \theta - n\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\alpha \sin \theta - n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $I = \int_0^{2\pi} \sin(\alpha \sin \theta - n\theta) d\theta = 0$. Ce dernier résultat s'obtient en posant $\theta = 2\pi - \phi$, on trouve alors

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(-\alpha \sin \phi - 2\pi n + n\phi) d\phi = - \int_0^{2\pi} \sin(\alpha \sin \phi - n\phi) d\phi = -I$$

si bien que $I = -I$ et $I = 0$. Le résultat demandé est donc établi.

La fonction $J_n(\alpha)$ est appelée fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n .

Pour plus de renseignements sur les fonctions de Bessel on pourra se reporter au chapitre 10.

34. Les polynômes de Legendre $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ sont définis par la formule de Rodrigues

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

(a) Démontrer que si C désigne une courbe fermée entourant le point $z = t$, alors

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{2^n} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}} dz$$

Cette formule est appelée représentation de Schlaefli pour $P_n(t)$, ou formule de Schlaefli.

(b) Démontrer que

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t + \sqrt{t^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta$$

(a) D'après les formules intégrales de Cauchy, si C entoure le point t ,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - t)^{n+1}} dz$$

Alors posant $f(t) = (t^2 - 1)^n$ soit $f(z) = (z^2 - 1)^n$, nous obtenons le résultat demandé

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - t)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

- (b) Prenons pour contour C un cercle centré en t et de rayon $\sqrt{|t^2 - 1|}$ [voir figure 6.7]. L'équation de C est alors $|z - t| = \sqrt{|t^2 - 1|}$ ou $z = t + \sqrt{t^2 - 1} e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. En reportant cette valeur dans (a), nous obtenons

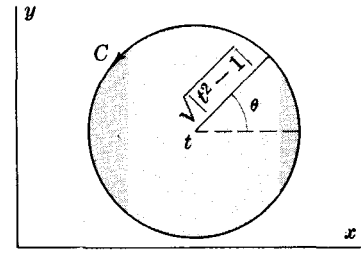


Fig. 6-7

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\{(t + \sqrt{t^2 - 1} e^{i\theta})^2 - 1\}^n \sqrt{t^2 - 1} e^{i\theta} d\theta}{(\sqrt{t^2 - 1} e^{i\theta})^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{(t^2 - 1) + 2t\sqrt{t^2 - 1} e^{i\theta} + (t^2 - 1)e^{2i\theta}\}^n e^{-in\theta} d\theta}{(t^2 - 1)^{n/2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{(t^2 - 1)e^{-i\theta} + 2t\sqrt{t^2 - 1} + (t^2 - 1)e^{i\theta}\}^n d\theta}{(t^2 - 1)^{n/2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{2t\sqrt{t^2 - 1} + 2(t^2 - 1) \cos \theta\}^n d\theta}{(t^2 - 1)^{n/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t + \sqrt{t^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta \end{aligned}$$

Pour d'autres résultats sur les polynômes de Legendre on pourra se reporter au chapitre 10.

Problèmes supplémentaires

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

35. A partir de la définition, démontrer que (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2z}{n + z} = 3$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{n^2 + z^2} = 0$.
36. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = U(z)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) = V(z)$, démontrer que (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n(z) \pm v_n(z)\} = U(z) \pm V(z)$,
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n(z) v_n(z)\} = U(z) V(z)$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)/v_n(z) = U(z)/V(z)$ si $V(z) \neq 0$.
37. (a) Montrer que la série $\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$ converge pour $|z| < 2$ et (b) trouver la somme.
 Ans. (a) $S_n(z) = \{1 - (z/2)^n\}/(2 - z)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ existe si $|z| < 2$, (b) $S(z) = 1/(2 - z)$
38. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ converge et (b) trouver la somme de cette série. Rép. : (a) $|z| < 1$, (b) 1
39. (a) Pour quelles valeurs de z la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$ converge-t-elle et (b) quelle est sa somme ?
 Rép. : Pour tout z tel que $|z^2 + 1| > 1$, (b) $1/z^2$
40. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(z)| = 0$, démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.
41. Démontrer que pour toute valeur finie de z , $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n/n! = 0$.

42. Soit $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ une suite de nombres positifs ayant zéro pour limite. On suppose que $|u_n(z)| \leq a_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$.
43. Démontrer que la convergence ou la divergence d'une série n'est pas modifiée si l'on ajoute ou si l'on retranche un nombre fini de termes.
44. Soit $S_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$, $T_n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$. (a) Montrer que $S_n = (T_n - nz^{n+1})/(1 - z)$.
 (b) Utiliser (a) pour trouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ et déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles cette série converge. Rép. : (b) $z/(1 - z)^2$, $|z| < 1$
45. Trouver la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$. Rép. 4

CONVERGENCE ABSOLUE ET CONVERGENCE UNIFORME

46. (a) Montrer que $u_n(z) = 3z + 4z^2/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ converge uniformément vers $3z$ pour tout z intérieur au cercle $|z| = 1$. (b) Le cercle de (a) est-il le plus petit possible ? Expliquer.
47. (a) La suite $u_n(z) = nz/(n^2 + z^2)$. [Problème 35 (b) converge-t-elle uniformément vers zéro pour tout z intérieur au cercle $|z| = 3$?] (b) Le résultat de (a) est-il valable pour toute valeur finie de z ?
48. Démontrer que la série $1 + az + a^2z^2 + \dots$ converge uniformément vers $1/(1 - az)$ à l'intérieur de $|z| = R$ où $R < 1/|a|$.
49. Etudier (a) l'absolue, (b) l'uniforme convergence de la série

$$\frac{z}{3} + \frac{z(3-z)}{3^2} + \frac{z(3-z)^2}{3^3} + \frac{z(3-z)^3}{3^4} + \dots$$

Rép. : (a) Convergence absolue si $|z - 3| < 3$ ou si $z = 0$. (b) Convergence uniforme pour $|z - 3| \leq R$ où $0 < R < 3$; pas de convergence uniforme dans tout voisinage contenant $z = 0$.

50. Etudier (a) l'absolue, (b) l'uniforme convergence de la série du problème 38.
 Rép. : (a) Convergence absolue si $|z| < 1$. (b) Convergence uniforme si $|z| \leq R$ où $R < 1$.
51. Etudier (a) l'absolue (b) l'uniforme convergence de la série du problème 39.
 Rép. : (a) Convergence absolue pour $|z^2 + 1| > 1$. (b) Convergence uniforme si $|z^2 + 1| \geq R$ où $R > 1$.
52. Soit $\{a_n\}$ une suite de constantes positives ayant pour limite zéro ; supposons que pour tout z dans un domaine R , $|u_n(z)| \leq a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = 0$ uniformément dans $\mathcal{A}$
53. (a) Démontrer que la suite $u_n(z) = nze^{-nz^2}$ converge vers zéro pour toute valeur finie de z telle que $\operatorname{Re}\{z^2\} > 0$ et représenter cette région géométriquement. (b) Discuter la convergence uniforme de la suite de (a).
 Rép. : (a) Il n'y a pas convergence uniforme dans toute région contenant $z = 0$.
54. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent absolument démontrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, où $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots +$ converge absolument.

55. Démontrer que si deux séries sont absolument et uniformément convergentes dans $\mathcal{A}$ leur produit est absolument et uniformément convergent dans $\mathcal{A}$:

CRITERES PARTICULIERS DE CONVERGENCE

56. Quelle est la nature des séries suivantes ?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n - 1}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2 - n + 2}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n^3+n+2}}.$$

Rép. (a) conv., (b) conv., (c) div., (d) conv., (e) div.

57. Etudier la convergence des séries suivantes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z}.$$

Rép. (a) Divergente pour tout z fini. (b) Convergente pour tout z . (c) Convergente pour tout z . (d) Convergente pour tout z excepté $z = -n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

58. Etudier la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{n\pi i/4}}{e^n - 1}$. Rép. Conv.

59. Trouver le domaine de convergence des séries suivantes: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$
 Rép. (a) $|z+i| \leq 1$, (b) $|(z+1)/(z-1)| \leq 3$, (c) $|z| < \infty$

60. Déterminer le domaine de convergence absolue de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n(z-i)^n}{4^n(n^2+1)^{5/2}}$.
 Rép. Conv. abs. pour $|z-i| \leq 4$

61. Déterminer le domaine de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{(n+1)^{3/2}}$.
 Rép. Convergence pour $\text{Im } z \geq 0$.

62. Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est divergente bien que le terme général tende vers zéro.

63. Soit N un entier positif, on suppose que pour tout $n > N$, $|u_n| > 1/(n \log n)$. Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

64. Démontrer (a) le critère de convergence de Cauchy [Théorème 12], (b) le critère de l'intégrale [Théorème 13] de la page 141.

65. Déterminer le domaine de convergence de $1 + 2z + z^2 + 2z^3 + z^4 + 2z^5 + \dots$ Rép. $|z| < 1$.

66. Démontrer le critère de Raabe (Théorème 14) de la page 141.

67. Que peut-on dire des séries (a) $\frac{1}{2 \log^2 2} + \frac{1}{3 \log^2 3} + \frac{1}{4 \log^2 4} + \dots$, (b) $\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots$, (c) $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 10} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 12}{5 \cdot 10 \cdot 15} + \dots$, (d) $\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} + \dots$.

Rép. (a) conv., (b) conv., (c) div., (d) div.

THEOREMES SUR LA CONVERGENCE UNIFORME ET LES SERIES ENTIERES

68. Déterminer les domaines de convergence uniforme des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + |z|^2}.$$

Rép. (a) $|z| \leq R$ où $R < 3$. (b) $|z-i| \leq 1$. (c) $|z| \geq R$ où $R > 1$. (d) z quelconque.

69. Démontrer le théorème 20, page 142.

70. Enoncer et démontrer les théorèmes sur les suites analogues aux théorèmes 18, 19 et 20, page 142 pour les séries.

71. (a) Par dérivation des deux membres de l'identité

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

trouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ pour $|z| < 1$. Justifier toutes les étapes du raisonnement.

(b) Trouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ pour $|z| < 1$.

Rép. (a) $z/(1-z)^2$ [comparer au problème 44], (b) $(1+z)/(1-z)^3$

72. On suppose z réel et $0 \leq z \leq 1$, et l'on considère $u_n(z) = nze^{-nz^2}$. (a) Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(z) dz$. (b) Trouver $\int_0^1 \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) \right\} dz$. (c) Expliquer pourquoi les réponses à (a) et (b) ne sont pas égales [voir problème 53].
 Rép. (a) $1/2$, (b) 0 .

73. Démontrer le théorème d'Abel [Théorème 24 page 142].

74. (a) Démontrer que $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$ pour $|z| < 1$.

(b) Si l'on considère la branche de $f(z) = \operatorname{arctg} z$ telle que $f(0) = 0$ utiliser (a) pour montrer que

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

(c) Démontrer que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

75. Démontrer le théorème 25, page 143.

76. (a) Déterminer $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que pour tout z dans $|z| \leq 1$, $Y'(z) = Y(z)$, $Y(0) = 1$. Énoncer tous les théorèmes utilisés et vérifier que le résultat obtenu est solution du problème posé.

(b) Le résultat obtenu en (a) est-il valable à l'extérieur du cercle $|z| = 1$? Justifier la réponse.

(c) Montrer que $Y(z) = e^z$ vérifie l'équation différentielle et les conditions de (a).

(d) Peut-on identifier la série trouvée en (a) avec e^z ? Expliquer.

Rép. (a) $Y(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

77. (a) À partir de l'équation différentielle $Y''(z) + Y(z) = 0$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$ établir le développement en série

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

(b) Comment pourrait-on obtenir un développement analogue pour $\cos z$?

THEOREME DE TAYLOR

78. Développer chacune des fonctions suivantes en série de Taylor au voisinage des points indiqués et déterminer le domaine de convergence dans chacun des cas considérés.

(a) e^{-z} ; $z = 0$ (b) $\cos z$; $z = \pi/2$ (c) $1/(1+z)$; $z = 1$ (d) $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$; $z = 2$ (e) ze^{2z} ; $z = -1$

79. Si chacune des fonctions suivantes était développée en série de Taylor au voisinage du point indiqué, quel serait son domaine de convergence? On ne cherchera pas le développement.

(a) $\sin z/(z^2 + 4)$; $z = 0$ (c) $(z+3)/(z-1)(z-4)$; $z = 2$ (e) $e^z/z(z-1)$; $z = 4i$ (g) $\frac{1}{\cos \pi z}$; $z = 1$
 (b) $z/(e^z + 1)$; $z = 0$ (d) $e^{-z^2} \operatorname{sh}(z+2)$; $z = 0$ (f) $\coth 2z$; $z = 0$

Rép. (a) $|z| < 2$, (b) $|z| < \pi$, (c) $|z-2| < 1$, (d) $|z| < \infty$, (e) $|z-4i| < 4$, (f) $|z| < \pi/2$, (g) $|z-1| < 1/2$

80. Vérifier les développements 1, 2, 3 pour e^z , $\sin z$ et $\cos z$ de la page 143.

81. Montrer que $\sin z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \dots$, $|z| < \infty$.

82. Montrer que $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$, $|z| < 1$.

83. Montrer que (a) $\operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots$, $|z| < \pi/2$

(b) $\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \dots$, $|z| < \pi/2$

(c) $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \dots$, $0 < |z| < \pi$

84. En remplaçant z par iz dans le développement du problème 82, trouver le résultat du problème 23(c) de la page 155.
85. Comment peut-on obtenir les développements en série de (a) $\operatorname{th} z$, (b) $\frac{1}{\operatorname{ch} z}$, (c) $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$ à partir des séries du problème 83 ?
86. Démontrer l'unicité du développement en série de Taylor de $f(z)$ dans le voisinage de $z = a$.
[On pourra supposer que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n$ et montrer que $c_n = d_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$]
87. Démontrer la formule du binôme énoncée au théorème 6 page 143.

88. Si l'on considère la branche de $\sqrt{1+z^3}$ qui prend la valeur 1 pour $z = 0$, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^9 + \dots \quad |z| < 1$$

89. (a) En choisissant la branche de $\arcsin z$ qui prend la valeur 0 pour $z = 0$, montrer que

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^7}{7} + \dots \quad |z| < 1$$

(b) Démontrer que le résultat de (a) est valable pour $z = i$.

90. (a) Développer $f(z) = \log(3 - iz)$ selon les puissances de $z - 2i$ en choisissant la branche du logarithme telle que $f(0) = \operatorname{Log} 3$ (b) quel est le domaine de convergence ?

Rép. (a) $\operatorname{Log} 5 - \frac{i(z-2i)}{5} + \frac{(z-2i)^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{i(z-2i)^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{(z-2i)^4}{4 \cdot 5^4} - \dots$ (b) $|z - 2i| < 5$

THEOREME DE LAURENT

91. Développer $f(z) = 1/(z-3)$ en série de Laurent valable pour (a) $|z| < 3$, (b) $|z| > 3$.

Rép. (a) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{9}z - \frac{1}{27}z^2 - \frac{1}{81}z^3 - \dots$ (b) $z^{-1} + 3z^{-2} + 9z^{-3} + 27z^{-4} + \dots$

92. Développer $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$ en série de Laurent valable pour :

(a) $|z| < 1$, (b) $1 < |z| < 2$, (c) $|z| > 2$, (d) $|z-1| > 1$, (e) $0 < |z-2| < 1$.

Rép. (a) $-\frac{1}{2}z - \frac{3}{4}z^2 - \frac{7}{8}z^3 - \frac{15}{16}z^4 - \dots$ (b) $\dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \dots$

(c) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{z^2} - \frac{7}{z^3} - \frac{15}{z^4} - \dots$ (d) $-(z-1)^{-1} - 2(z-1)^{-2} - 2(z-1)^{-3} - \dots$

(e) $1 - 2(z-2)^{-1} - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + (z-2)^4 - \dots$

93. Développer $f(z) = 1/z(z-2)$ en série de Laurent valable pour (a) $0 < |z| < 2$, (b) $|z| > 2$.

94. Trouver un développement de $f(z) = z/(z^2 + 1)$ valable pour $|z-3| > 2$.

95. Développer $f(z) = 1/(z-2)^2$ en série de Laurent valable pour (a) $|z| < 2$, (b) $|z| > 2$.

96. Développer chacune des fonctions suivantes en série de Laurent au voisinage de $z = 0$; préciser dans chaque cas la nature de la singularité.

(a) $(1 - \cos z)/z$, (b) e^{z^2}/z^3 , (c) $z^{-1} \operatorname{argch} z$, (d) $z^2 e^{-z^4}$, (e) $z \operatorname{sh} z \sqrt{z}$.

Rép. (a) $\frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - \dots$; singularité apparente (d) $z^2 - z^6 + \frac{z^{10}}{2!} - \frac{z^{14}}{3!} + \dots$;
point ordinaire,

(b) $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^7}{5!} + \dots$;
pôle triple

(e) $z^{3/2} + \frac{z^{5/2}}{3!} + \frac{z^{7/2}}{5!} + \frac{z^{9/2}}{7!} + \dots$;

(c) $\frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z^5} - \dots$; singularité essentielle. point de branchement.

97. Démontrer que si $\operatorname{tg} z$ est développée en série de Laurent au voisinage de $z = \pi/2$, (a) la partie principale est $-1/(z - \pi/2)$ (b) la série converge pour $0 < |z - \pi/2| < \pi/2$, (c) $z = \pi/2$ est un pôle simple.

98. Déterminer et classer toutes les singularités des fonctions :

(a) $1/(2 \sin z - 1)^2$, (b) $z/(e^{1/z} - 1)$, (c) $\cos(z^2 + z^{-2})$, (d) $\operatorname{arctg}(z^2 + 2z + 2)$, (e) $z/(e^z - 1)$.

Rép. (a) $\pi/6 + 2m\pi$, $(2m+1)\pi - \pi/6$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; pôles doubles

(b) $i/2m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; pôles simples, $z = 0$; point singulier essentiel, $z = \infty$; pôle double.

(c) $z = 0, \infty$; points singuliers essentiels (d) $z = -1 \pm i$; points de branchement.

(e) $z = 2m\pi i$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$; pôles simples, $z = 0$ singularité apparente, $z = \infty$; point singulier essentiel.

99. (a) Développer $f(z) = e^{z/(z-2)}$ en série de Laurent au voisinage de $z = 2$ et (b) déterminer le domaine de convergence de cette série. (c) Classer les singularités de $f(z)$.

Rép. (a) $e \left\{ 1 + 2(z-2)^{-1} + \frac{2^2(z-2)^{-2}}{2!} + \frac{2^3(z-2)^{-3}}{3!} + \dots \right\}$ (b) $|z-2| > 0$ (c) $z = 2$; point singulier essentiel, $z = \infty$; singularité apparente.

100. Etablir le résultat (7) page 144 concernant les coefficients d'une série de Laurent.

101. Démontrer que les seules singularités d'une fraction rationnelle sont des pôles.

102. Démontrer la réciproque de la proposition du problème 101, i.e. si les seules singularités d'une fonction sont des pôles cette fonction est une fraction rationnelle.

DEVELOPPEMENT DE LAGRANGE

103. Montrer que la racine de l'équation $z = 1 + \zeta z^p$, qui prend la valeur 1 pour $\zeta = 0$, est donnée par

$$z = 1 + \zeta + \frac{2p}{2!} \zeta^2 + \frac{(3p)(3p-1)}{3!} \zeta^3 + \frac{(4p)(4p-1)(4p-2)}{4!} \zeta^4 + \dots$$

104. Calculer la racine considérée au problème 103 pour $p = 1/2$ et $\zeta = 1$, (a) en utilisant une série, (b) exactement; comparer les deux réponses. Rép. 2,62 valeur approchée.

105. En considérant l'équation $z = \alpha + \frac{1}{2}\zeta(z^2 - 1)$, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\zeta+\zeta^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2^n n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} (\alpha^2 - 1)^n$$

106. Montrer comment le développement de Lagrange peut être utilisé pour résoudre le problème de Kepler qui consiste en la détermination de la racine de $z = a + \zeta \sin z$ pour laquelle $z = a$ quand $\zeta = 0$.

107. Etablir le développement de Lagrange (12) de la page 145.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

108. (a) Démontrer que $F_2(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i} \right)^n$ est un prolongement analytique de $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, représenter graphiquement les domaines de convergence de ces séries.

(b) Quelle est la fonction représentée par tous les prolongements analytiques de $F_1(z)$? Rép. (b) $1/(1-z)$.

109. Soit $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{3^n}$. (a) Trouver un prolongement analytique de $F_1(z)$ qui converge pour $z = 3 - 4i$

(b) Quelle est la valeur du prolongement analytique de (a) pour $z = 3 - 4i$. Rép. (b) $-3 - \frac{9}{4}i$.

110. Démontrer que la série

$$z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \dots$$

ne peut être prolongée analytiquement au-delà de $|z| = 1$.

PROBLEMES DIVERS

111. (a) Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge pour $p \leq 1$.

(b) Démontrer que si p est complexe la série considérée en (a) converge si $\operatorname{Re}\{p\} > 1$.

(c) Etudier la nature de la série de (a) si $\operatorname{Re}\{p\} \leq 1$.

112. Quelle est la nature des séries suivantes : (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+i}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin^2 n}{ie^n + (2-i)n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin(1/n^3)$,
 (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(i)^n}{n \operatorname{Log} n}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arg \coth n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.
 Rép. (a) div., (b) conv., (c) conv., (d) conv., (e) div., (f) conv.

113. Expliquer en quoi le raisonnement suivant dû à Euler pour démontrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n = 0$ est faux :

$$\frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

d'où par addition $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n = 0$.

114. Montrer que pour $|z-1| < 1$, $z \log z = (z-1) + \frac{(z-1)^2}{1 \cdot 2} - \frac{(z-1)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(z-1)^4}{3 \cdot 4} - \dots$.

115. Développer $\sin^3 z$ en série de Maclaurin. Rép. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-3^{2n-1})z^{2n-1}}{4(2n-1)!}$

116. Etant donné la série $z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^3} + \dots$.

- (a) Montrer que la somme des n premiers termes est $S_n(z) = 1 + z^2 - 1/(1+z^2)^{n-1}$.
 (b) Montrer que la somme de la série est $1 + z^2$ pour $z \neq 0$, et 0 pour $z = 0$; montrer que $z = 0$ est un point de discontinuité.
 (c) Montrer que la série n'est pas uniformément convergente dans le disque $|z| \leq \delta$ où $\delta > 0$.

117. Si $F(z) = \frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$, trouver une série de Laurent représentant $F(z)$ au voisinage de $z = 1$, convergente pour $\frac{1}{2} < |z-1| < 1$.

Rép. $\dots - \frac{1}{8}(z-1)^{-4} + \frac{1}{4}(z-1)^{-3} - \frac{1}{2}(z-1)^{-2} + (z-1)^{-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \dots$

118. Soit $G(z) = (\operatorname{arctg} z)/z^4$. (a) Développer $G(z)$ en série de Laurent. (b) Déterminer le domaine de convergence de la série étudié en (a). (c) Evaluer $\oint_C G(z) dz$ où C est un carré de sommets en $2 \pm 2i, -2 \pm 2i$.

Rép. (a) $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z} + \frac{z}{5} - \frac{z^3}{7} + \dots$ (b) $|z| > 0$ (c) $-1/3$

119. Pour chacune des fonctions ze^{1/z^2} , $(\sin^2 z)/z$, $1/z(4-z)$ qui ont une singularité en $z = 0$: (a) donner un développement de Laurent au voisinage de $z = 0$ et déterminer le domaine de convergence de ce développement; (b) préciser dans chaque cas la nature de la singularité; (c) évaluer l'intégrale de chacune de ces fonctions sur le cercle $|z| = 2$.

Rép. (a) $z + z^{-1} + z^{-3}/2! + z^{-5}/3! + \dots$; $|z| > 0$, $2z - 2z^3/3 + 4z^5/45 - \dots$; $|z| \geq 0$, $z^{-1/4} + 1/16 + z/64 + z^2/256 + \dots$; $0 < |z| < 4$

(b) point singulier essentiel, singularité apparente, pôle. (c) $2\pi i$, 0, $\pi i/2$.

120. (a) Etudier la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$. (b) Votre réponse à (a) est-elle en contradiction avec le problème 8, page 148? Rép. (a) diverge.

121. (a) Montrer que la série $\frac{\sin z}{1^2+1} + \frac{\sin^2 z}{2^2+1} + \frac{\sin^3 z}{3^2+1} + \dots$, où $z = x + iy$, converge absolument dans le domaine limité par $\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = 1$. (b) Représenter graphiquement ce domaine.

122. Si $|z| > 0$ montrer que

$$\operatorname{ch}(z + 1/z) = c_0 + c_1(z + 1/z) + c_2(z^2 + 1/z^2) + \dots$$

$$\text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\phi \operatorname{ch}(2 \cos \phi) d\phi$$

123. Si $f(z)$ possède des zéros simples en $1-i$ et $1+i$, des pôles doubles en $-1+i$ et $-1-i$, mais aucune autre singularité, montrer que la fonction $f(z)$ est donnée par

$$f(z) = \kappa \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

où κ est une constante arbitraire.

124. Démontrer que pour tout z , $e^z \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin(n\pi/4)}{n!} z^n$.

125. Montrer que $\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, préciser toutes les étapes du raisonnement [on pourra utiliser le problème 23].

126. Etudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{[1 + (n-1)z][1 + nz]}$.

[On décomposera le $n^{\text{ième}}$ terme en éléments simples et on montrera que la somme partielle $S_n(z) = 1 - \frac{1}{1 + nz}$]

Rép. Pas de convergence uniforme dans toute région contenant $z = 0$; convergence uniforme pour des domaines tels que $|z| \geq \delta$ où δ est un nombre positif quelconque.

127. Si $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ converge vers S montrer qu'en disposant les termes d'une autre manière on obtient $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots = -S$. Expliquer.

[Si l'on prend la moitié de la première série et si on l'écrit $0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \dots$; alors par addition terme à terme avec la série initiale on trouvera le résultat demandé. On remarque que $S = \text{Log } 2$ comme il a été démontré dans le problème 125].

128. Montrer que la série hypergéométrique

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots$$

(a) converge absolument si $|z| < 1$, (b) diverge pour $|z| > 1$, (c) converge absolument pour $z = 1$ si $\text{Re}\{a + b - c\} < 0$, (d) vérifier l'équation différentielle $z(1-z)Y'' + \{c - (a+b+1)z\}Y' - abY = 0$.

129. Démontrer que pour $|z| < 1$,

$$(\arcsin z)^2 = z^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{z^6}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{z^8}{4} + \dots$$

130. Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}}$ diverge.

131. Montrer que $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 2 \text{Log } 2 - 1$

132. Quelles sont les singularités de $\frac{z^6 + 1}{(z-1)^3(3z+2)^2} \sin\left(\frac{z^2}{z-3}\right)$? Quelle est leur nature ?

133. En utilisant uniquement les propriétés des séries, démontrer que

$$(a) \left\{ 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \right\} \left\{ 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \dots \right\} = \left\{ 1 + (a+b) + \frac{(a+b)^2}{2!} + \dots \right\}$$

$$(b) \left\{ 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \dots \right\}^2 + \left\{ a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \dots \right\}^2 = 1$$

134. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| < R$ et si $0 \leq r < R$ démontrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

135. Utiliser le problème 134 pour démontrer l'inégalité de Cauchy (page 118).

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

136. Si une fonction possède six zéros d'ordre 4 et quatre pôles d'ordre 3, 4, 7 et 8, s'il n'y a pas d'autre singularité à distance finie montrer que la fonction considérée possède un pôle double en $z = \infty$.

137. Dire si les fonctions suivantes sont entières, méromorphes ou ni l'un ni l'autre

(a) $z^2 e^{-z}$, (b) $\cot 2z$, (c) $(1 - \cos z)/z$, (d) $\text{ch } z^2$, (e) $z \sin(1/z)$, (f) $z + 1/z$, (g) $\sin \sqrt{z}/\sqrt{z}$, (h) $\sqrt{\sin z}$.

Rép. fonctions entières (a), (c), (d), (g) ; fonctions méromorphes (b), (f).

138. Si $-\pi < \theta < \pi$, montrer que

$$\text{Log}(2 \cos \theta/2) = \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta + \dots$$

139. (a) Développer $1/\text{Log}(1+z)$ en série de Laurent au voisinage de $z=0$ et (b) déterminer le domaine de convergence.

Rép. (a) $\frac{1}{z} + \frac{z}{2} - \frac{z}{12} + \frac{z^2}{24} + \frac{89z^3}{720} + \dots$ (b) $0 < |z| < 1$

140. Si $S(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$, démontrer que

$$\frac{S(z)}{1-z} = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \dots$$

avec des restrictions convenables si cela est nécessaire.

141. Montrer que la série $\frac{1}{1+|z|} - \frac{1}{2+|z|} + \frac{1}{3+|z|} - \frac{1}{4+|z|} + \dots$

(a) n'est pas absolument convergente mais (b) est uniformément convergente pour toutes les valeurs de z .

142. Démontrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point de $|z| \leq 1$ excepté $z=1$.

143. Montrer que la solution de $z = a + \zeta e^z$, qui prend la valeur a pour $\zeta=0$, est donnée par

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} e^{na} \zeta^n}{n!}$$

si $|\zeta| < |e^{-(a+1)}|$.

144. Trouver la somme de la série $1 + \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2!} + \frac{\cos 3\theta}{3!} + \dots$. Rép. $e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta)$

145. Soit $F(z)$ une fonction analytique pour toute valeur finie de z , on suppose que $F(z)$ a la période 2π , i.e. $F(z+2\pi) = F(z)$. Montrer que

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inz} \quad \text{où} \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z) e^{-inz} dz$$

La série est appelée série de Fourier de $F(z)$.

146. Démontrer que la série $\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta + \dots$

a pour somme $\pi/4$ si $0 < \theta < \pi$ et $-\pi/4$ si $-\pi < \theta < 0$.

147. Démontrer que l'on ne peut pas prolonger analytiquement la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{3^n}$ au-delà de la frontière $|z|=1$.

148. Si $f(z)$ est analytique et non identiquement nulle dans la région $0 < |z-z_0| < R$, et si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$, montrer qu'il existe un nombre positif n tel que $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ est analytique en z_0 et différente de zéro.

149. Si $f(z)$ est analytique dans un voisinage pointé de z_0 et si $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, montrer que $z=z_0$ est un pôle de f .

150. Expliquer en quoi la fonction $f(x) = e^{1/x^2}$ ne convient pas au problème précédent.

151. (a) Montrer que la fonction $f(z) = e^{1/z}$ peut prendre toute valeur excepté zéro. (b) Quelle relation y a-t-il entre le résultat de (a) et les théorèmes de Casorati-Weierstrass et de Picard ?

152. (a) Déterminer si la fonction $g(z) = z^2 - 3z + 2$ peut prendre toute valeur complexe. (b) Y a-t-il une relation entre (a) et les théorèmes de Casorati-Weierstrass et de Picard ?

153. Démontrer le théorème de Casorati-Weierstrass énoncé à la page 145. [On utilisera le fait que si $z=a$ est un point singulier essentiel de $f(z)$ alors c'est aussi un point singulier essentiel de $1/\{f(z)-A\}$.]

154. (a) Montrer que le long de toute droite passant par $z=0$, $|z+e^z| \rightarrow \infty$.

(b) Le résultat de (a) est-il en contradiction avec le théorème de Casorati-Weierstrass ?

155. (a) Montrer qu'une fonction entière $f(z)$ peut prendre toute valeur avec peut-être une exception.
 (b) Illustrer le résultat de (a) avec e^z , quelle est l'exception dans ce cas ?
 (c) Quelle relation y a-t-il entre ce résultat et les théorèmes de Casorati-Weierstrass et de Picard ?
156. Montrer que toute fonction entière possède une singularité à l'infini. Préciser la nature de cette singularité. Justifier la réponse.

157. Montrer que

$$(a) \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{1+z} = z - (1+\frac{1}{2})z^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})z^3 - \dots, \quad |z| < 1$$

$$(b) \{\operatorname{Log}(1+z)\}^2 = z^2 - (1+\frac{1}{2})\frac{2z^3}{3} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{2z^4}{4} - \dots, \quad |z| < 1$$

158. Trouver la somme des séries suivantes pour $|a| < 1$:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} na^n \sin n\theta, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n \sin n\theta$$

159. Montrer que

$$e^{\sin z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{15} + \dots, \quad |z| < \infty.$$

160. (a) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge pour $|z| \leq 1$.

(b) Montrer que la fonction $F(z)$ définie comme l'ensemble de tous les prolongements analytiques possibles de la série de (a), possède un point singulier en $z = 1$.

(c) Concilier les résultats de (a) et (b).

161. On suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ est convergente à l'intérieur de son cercle de convergence de rayon R . Il existe

un théorème qui établit que la fonction $F(z)$ définie par l'ensemble de tous les prolongements analytiques possibles de cette série, possède au moins un point singulier sur le cercle de convergence. (a) Illustrer le théorème par plusieurs exemples. (b) Pouvez-vous démontrer le théorème ?

162. Montrer que

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U(\phi) d\phi}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \sin n\phi d\phi$$

163. Soit $\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \dots$. (a) Montrer que les nombres B_n , appelés nombres de Bernoulli vérifient la relation de récurrence $(B + 1)^n = B^n$ où B^k est formellement remplacé par B_k après développement. (b) A l'aide de (a) ou par toute autre méthode, déterminer $B_1, \dots, B_6$.

Rép. (b) $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$

164. (a) Montrer que $\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \left(\coth \frac{z}{2} - 1 \right)$. (b) Utiliser le problème 163 et la partie (a) pour montrer que $B_{2k+1} = 0$ si $k = 1, 2, 3, \dots$.

165. Etablir les développements en séries suivant

$$(a) \coth z = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \dots + \frac{B_{2n}(2z)^{2n}}{(2n)! z} + \dots, \quad |z| < \pi$$

$$(b) \cotg z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \dots + (-1)^n \frac{B_{2n}(2z)^{2n}}{(2n)! z} + \dots, \quad |z| < \pi$$

$$(c) \operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2(2^{2n}-1)B_{2n}(2z)^{2n-1}}{(2n)!}, \quad |z| < \pi/2$$

$$(d) \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!} + \dots, \quad |z| < \pi$$

[Pour (a) utiliser le problème 164 ; pour (b) remplacer z par iz dans (a) ; pour (c) utiliser

$\operatorname{tg} z = \cotg z - 2 \cotg 2z$; pour (d) utiliser $\frac{1}{\sin z} = \cotg z + [\operatorname{tg} z/2]$.

Le théorème des résidus

Applications aux intégrales et aux séries

RESIDUS

Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , excepté au point $z = a$ centre de C . Alors comme nous l'avons vu au chapitre 6, $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \\ &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ nous avons d'après (2)

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (3)$$

On peut obtenir formellement (3) à partir de (1) par intégration terme à terme en utilisant les résultats (problèmes 21 et 22, chapitre 4).

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^p} = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p = \text{entier} \neq 1 \end{cases} \quad (4)$$

L'intégrale de (3) s'exprimant à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (1), on appelle a_{-1} le résidu de $f(z)$ en $z = a$.

CALCUL DES RESIDUS

Pour obtenir le résidu d'une fonction $f(z)$ en $z = a$ on pourrait croire d'après (1) à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$. En fait, dans le cas où $z = a$ est un pôle d'ordre k il existe une formule simple qui donne a_{-1}

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \{(z-a)^k f(z)\} \quad (5)$$

Si $k = 1$ (pôle simple) le résultat est particulièrement simple

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \quad (6)$$

qui est un cas particulier de (5) avec $k = 1$ si l'on pose $0! = 1$.

Exemple 1 : Si $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, alors $z = 1$ et $z = -1$ sont respectivement des pôles d'ordre 1 et 2.

On a d'après (6) et (5) avec $k = 2$,

$$\begin{aligned} \text{Résidu en } z = 1 & \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4} \\ \text{Résidu en } z = -1 & \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Si $z = a$ est un point singulier essentiel, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 2 : Si $f(z) = e^{-1/z}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu de e^u avec $u = -1/z$, on trouve

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{3! z^3} + \dots$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $1/z$ sa valeur est -1 .

LE THEOREME DES RESIDUS

Soit $f(z)$ une fonction uniforme et analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en des singularités $a, b, c, \dots$ intérieures à C pour lesquelles les résidus de $f(z)$ sont $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ [voir figure 7.1]. Alors le théorème des résidus établit que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots) \quad (7)$$

i.e. L'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C . Notons que (7) est une généralisation de (3). Le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème (voir problème 75),

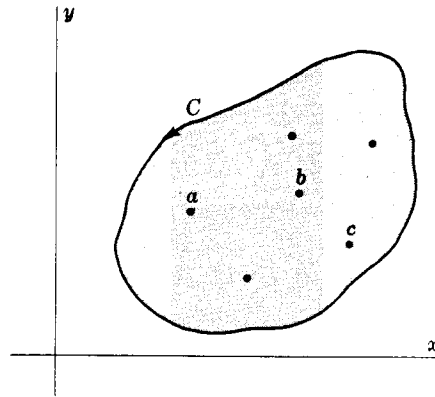


Fig. 7-1

CALCULS D'INTEGRALES DEFINIES

Le calcul d'intégrales définies peut souvent être effectué en utilisant le théorème des résidus appliqué à une fonction et à un contour convenables dont le choix peut demander une grande ingéniosité. Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$, $F(x)$ est une fraction rationnelle.

On considère $\oint_C F(z) dz$ le long d'un contour C formé d'une portion de l'axe des x de $-R$ à $+R$ et du demi-cercle Γ du demi-plan supérieur $y > 0$, ayant l'axe des x pour diamètre [Fig. 7.2]. On fait alors tendre R vers ∞ . Si $F(x)$ est une fonction paire cette méthode peut être utilisée pour calculer $\int_0^{\infty} F(x) dx$; voir problèmes 7-10.

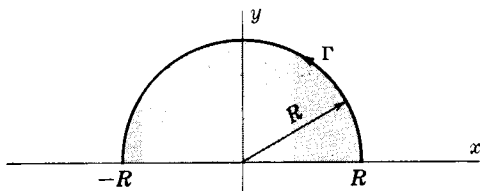


Fig. 7-2

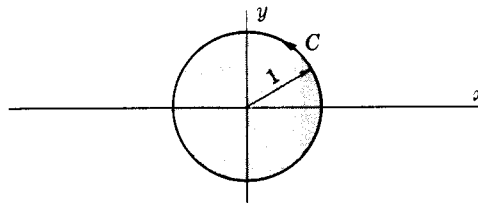


Fig. 7-3

2. $\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$, $G(\sin \theta, \cos \theta)$ est une fraction rationnelle de $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

Soit $z = e^{i\theta}$, alors $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{i\theta} d\theta$ ou $d\theta = dz/iz$.

L'intégrale donnée est égale à $\oint_C F(z) dz$ où C est le cercle unité centré à l'origine [Fig. 7.3] ; voir problèmes 11-14.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx, \quad F(x) \text{ est une fraction rationnelle}$$

Dans ce cas on considère $\oint_C F(z) e^{imz} dz$ où C est le même contour que dans 1 ; voir problèmes 15-17, et 37.

4. Intégrales diverses nécessitant des contours particuliers ; voir problèmes 18-23.

THEOREMES PARTICULIERS UTILISES POUR LE CALCUL D'INTEGRALES

Lorsque l'on calcule des intégrales analogues à celles des types 1 et 3 ci-dessus, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_{\Gamma} F(z) dz$ et $\int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz$ tendent vers zéro quand $R \rightarrow \infty$. Les théorèmes suivants sont fondamentaux.

Théorème 1. Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{i\theta}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure 7.2,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F(z) dz = 0$$

Voir problème 7.

Théorème 2. Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{i\theta}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure 7.2,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz = 0$$

Voir problème 15.

VALEUR PRINCIPALE D'UNE INTEGRALE AU SENS DE CAUCHY

Si $F(z)$ est continue dans $a \leq x \leq b$ sauf en un point x_0 tel que $a < x_0 < b$, alors si ϵ_1 et ϵ_2 sont positifs on définit

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ \int_a^{x_0 - \epsilon_1} F(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon_2}^b F(x) dx \right\}$$

Dans certains cas la limite ainsi considérée n'existe pas si $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ mais existe pour $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$. Dans de pareils cas on appelle

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \epsilon} F(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b F(x) dx \right\}$$

la valeur principale au sens de Cauchy de l'intégrale figurant au premier membre.

Exemple :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon_1} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon_2}^1 \frac{dx}{x^3} \right\} = \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_2^2} - \frac{1}{2\epsilon_1^2} \right\}$$

n'existe pas. Toutefois la valeur principale au sens de Cauchy avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ existe et est égale à zéro.

DERIVATION SOUS LE SIGNE $\int$. REGLE DE LEIBNITZ.

Une méthode utile pour le calcul d'intégrales se déduit de la règle de Leibnitz pour la dérivation sous le signe $\int$. Cette règle consiste en l'égalité

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, \alpha) dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx$$

Ce résultat peut être utilisé si a et b sont des constantes, α un paramètre réel tel que $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ où α_1 et α_2 sont des constantes, et $F(x, \alpha)$ une fonction continue et à dérivée partielle continue par rapport à α pour $a \leq x \leq b$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. On peut étendre cette règle aux cas où a et b sont infinis ou dépendent de α .

CALCULS DE SOMMES DE SERIES

Le théorème des résidus peut souvent être utilisé pour calculer la somme de types variés de séries. Les résultats suivants sont valables moyennant peu de restrictions sur $f(z)$, les conditions de validité sont généralement remplies quand la série converge. Voir problème 24-32 et 38.

$$\begin{aligned} \S \quad 1. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= - \{ \text{somme des résidus de } \pi \cotg \pi z f(z) \text{ en tous les pôles de } f(z) \} \\ 2. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) &= - \{ \text{somme des résidus de } \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) \text{ en tous les pôles de } f(z) \} \\ 3. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \{ \text{somme des résidus de } \pi \tg \pi z f(z) \text{ en tous les pôles de } f(z) \} \\ 4. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \{ \text{somme des résidus de } \frac{\pi}{\cos \pi z} f(z) \text{ en tous les pôles de } f(z) \} \end{aligned}$$

THEOREME DE MITTAG-LEFFLER

1. On suppose que les seules singularités de $f(z)$ à distance finie sont des pôles simples $a_1, a_2, a_3, \dots$ rangés par ordre de valeur absolue croissante.
2. On note par $b_1, b_2, b_3, \dots$ les résidus de $f(z)$ en $a_1, a_2, a_3, \dots$
3. Soit C_N des cercles de rayon R_N ne passant par aucun pôle et sur lesquels $|f(z)| < M$ où M est indépendant de N et $R_N \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$.

Dans ces conditions le théorème de Mittag-Leffler établit que $f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\}$

QUELQUES DEVELOPPEMENTS PARTICULIERS

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right) \\ 2. \quad \frac{1}{\cos z} &= \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 - z^2} - \dots \right) \\ 3. \quad \tg z &= 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right) \\ 4. \quad \cotg z &= \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} + \dots \right) \\ 5. \quad \frac{1}{\sh z} &= \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} - \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} - \dots \right) \\ 6. \quad \frac{1}{\ch z} &= \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 + z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 + z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 + z^2} - \dots \right) \\ 7. \quad \th z &= 2z \left(\frac{1}{z^2 + (\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (3\pi/2)^2} + \frac{1}{z^2 + (5\pi/2)^2} + \dots \right) \\ 8. \quad \coth z &= \frac{1}{z} + 2z \left(\frac{1}{z^2 + \pi^2} + \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 + 9\pi^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Problèmes résolus

RESIDUS. THEOREME DES RESIDUS

1. Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un point a intérieur à C .

(a) Montrer que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

i.e. $f(z)$ peut être développée en série de Laurent convergeant dans le voisinage de $z = a$.

(b) Montrer que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

(a) C'est une conséquence du théorème 25 Chapitre 6.

(b) Si l'on donne à n la valeur -1 dans le résultat de (a), nous trouvons

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz, \quad \text{i.e.} \quad \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

On appelle a_{-1} le résidu de $f(z)$ en $z = a$.

2. Démontrer le théorème des résidus. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C sauf en un nombre fini de points $a, b, c, \dots$ intérieurs à C dont les résidus sont respectivement $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ alors

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots)$$

i.e. $2\pi i$ fois la somme des résidus en toutes les singularités intérieures à C .

On construit les cercles $C_1, C_2, C_3, \dots$ centrés en $a, b, c, \dots$ et situés entièrement à l'intérieur de C ainsi qu'on l'a représenté dans la figure 7-4. D'après le théorème 5 page 97 on a

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz + \dots \quad (1)$$

Mais d'après le problème 1

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}, \quad \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i b_{-1}, \quad \oint_{C_3} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}, \quad \dots \quad (2)$$

Alors de (1) et (2) on déduit le résultat demandé

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots) = 2\pi i(\text{somme des résidus})$$

La démonstration précédente établit le théorème des résidus pour des domaines simplement connexes contenant un nombre fini de singularités de $f(z)$. On peut l'étendre à des domaines contenant une infinité de singularités isolées de $f(z)$ ou étant multiplément connexes (voir problèmes 96 et 97).

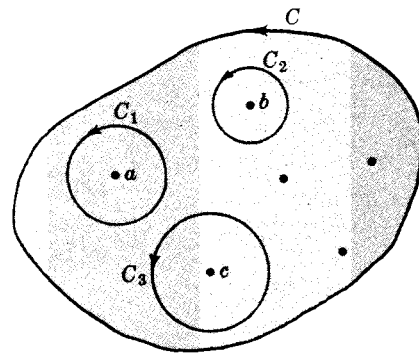


Fig. 7-4

3. Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un pôle a d'ordre m intérieur à C . Montrer que le résidu de $f(z)$ en a est donné par

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

Méthode 1. Si a est pôle d'ordre m de $f(z)$, alors le développement en série de Laurent de $f(z)$ est

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad (1)$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(z-a)^m$, on a

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \dots \quad (2)$$

qui représente la série de Taylor de la fonction analytique du premier membre. Par dérivation des deux membres $(m-1)$ fois par rapport à z , on obtient

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1} + m(m-1) \dots 2a_0(z-a) + \dots$$

Soit en faisant tendre z vers a

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1}$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

Méthode 2. Le résultat cherché provient immédiatement du théorème de Taylor en remarquant que le coefficient de $(z-a)^{m-1}$ dans le développement (2) est

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\} \Big|_{z=a}$$

Méthode 3. Voir problème 28, chapitre 5, page 132.

4. Trouver les résidus de (a) $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ et (b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en tous les pôles à distance finie.

(a) $f(z)$ possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$.

Méthode 1.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ (z-2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right\} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25}$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \left\{ (z+2i) \cdot \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} \right\} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

Méthode 2.

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ \frac{(z-2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} &= \left\{ \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2} \right\} \left\{ \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z-2i}{z^2+4} \right\} \\ &= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{2z} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2} \cdot \frac{1}{4i} = \frac{7+i}{25} \end{aligned}$$

d'après la règle de L'Hospital. De même en remplaçant i par $-i$ nous pouvons obtenir le résidu en $z = -2i$.

- (b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ possède des pôles doubles en $z = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$, i.e. $z = m\pi$ avec $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Méthode 1.

Le résidu en $z = m\pi$ est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-m\pi)^2 \frac{e^z}{\sin^2 z} \right\} \\ = \lim_{z \rightarrow m\pi} \frac{e^z[(z-m\pi)^2 \sin z + 2(z-m\pi) \sin z - 2(z-m\pi)^2 \cos z]}{\sin^3 z} \end{aligned}$$

En posant $z - m\pi = u$ ou $z = u + m\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} e^{u+m\pi} \left\{ \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u} \right\} \\ = e^{m\pi} \left\{ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{\sin^3 u} \right\} \end{aligned}$$

On peut utiliser la règle de L'Hospital, toutefois il est plus simple de remarquer d'abord que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^3}{\sin^3 u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u}{\sin u} \right)^3 = 1 \text{ et de mettre l'expression considérée sous la forme}$$

$$\begin{aligned} e^{m\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{u^3} \cdot \frac{u^3}{\sin^3 u} \right) \\ = e^{m\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u + 2u \sin u - 2u^2 \cos u}{u^3} = e^{m\pi} \end{aligned}$$

en utilisant plusieurs fois la règle de L'Hospital. On peut également pour chercher cette limite, utiliser les développements $\sin u = u - u^3/3! + \dots$, $\cos u = 1 - u^2/2! + \dots$.

Méthode 2 (à l'aide des séries de Laurent)

Cette méthode consiste à développer $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = m\pi$ et à chercher le coefficient de $\frac{1}{z - m\pi}$ qui est le résidu demandé. On pose pour simplifier les calculs, $z = m\pi + u$. On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u = 0$; la fonction considérée prend alors la forme $\frac{e^{m\pi} e^u}{\sin^2(m\pi + u)} = \frac{e^{m\pi} e^u}{\sin^2 u}$. A l'aide des développements de Maclaurin de e^u et $\sin u$ on trouve par division

$$\begin{aligned} \frac{e^{m\pi} e^u}{\sin^2 u} &= \frac{e^{m\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right)}{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \right)^2} = \frac{e^{m\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \dots \right)}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} - \dots \right)^2} \\ &= \frac{e^{m\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \dots \right)}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} + \dots \right)} = e^{m\pi} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{3} + \dots \right) \end{aligned}$$

le résidu est donc $e^{m\pi}$.

5. Trouver le résidu de $F(z) = \frac{\cotg z \coth z}{z^3}$ en $z = 0$.

Nous avons de même que dans la méthode 2 du problème 4(b),

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\cos z \operatorname{ch} z}{z^3 \sin z \operatorname{sh} z} = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)}{z^3 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{z^4}{6} + \dots \right)}{z^5 \left(1 - \frac{z^4}{90} + \dots \right)} = \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{7z^4}{45} + \dots \right) \end{aligned}$$

et donc le résidu (coefficient de $1/z$) est $-7/45$.

Autre méthode. Le résultat cherché peut aussi être obtenu en calculant

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} \left\{ z^5 \frac{\cos z \operatorname{ch} z}{z^3 \sin z \operatorname{sh} z} \right\}$$

mais cette méthode est plus laborieuse que celle indiquée plus haut.

6. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$ le long du cercle C d'équation $|z| = 3$.

La fonction à intégrer $\frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$ possède un pôle double $z = 0$ et deux pôles simples en $z = -1 \pm i$ [racines de $z^2 + 2z + 2 = 0$]. Tous ces pôles sont intérieurs à C .

Le résidu en $z = 0$ est

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 + 2z + 2)(te^{zt}) - (e^{zt})(2z + 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2} = \frac{t - 1}{2}$$

Le résidu en $z = -1 + i$ est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ [z - (-1+i)] \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ \frac{e^{zt}}{z^2} \right\} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ \frac{z + 1 - i}{z^2 + 2z + 2} \right\} \\ &= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-1+i)^2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4} \end{aligned}$$

Le résidu en $z = -1 - i$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1-i} \left\{ [z - (-1-i)] \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz &= 2\pi i (\text{somme des résidus}) \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t \right\} \end{aligned}$$

$$\text{i.e.,} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t$$

INTEGRALES DEFINIES DU TYPE $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$

7. Si $|F(z)| \leq M/R^k$ pour $z = Re^{i\theta}$ où $k > 1$ et M sont des constantes, montrer que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F(z) dz = 0$ où Γ est le demi-cercle de rayon R de la figure 7.5.

D'après la propriété 5, page 93, nous avons

$$\left| \int_{\Gamma} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

car la longueur L de l'arc est $L = \pi R$. Alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} F(z) dz \right| = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F(z) dz = 0$$

8. Montrer que pour $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, $k > 1$ si $f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$.

Si $z = Re^{i\theta}$, $|f(z)| = \left| \frac{1}{R^6 e^{6i\theta} + 1} \right| \leq \frac{1}{|R^6 e^{6i\theta} - 1|} = \frac{1}{R^6 - 1} \leq \frac{2}{R^6}$ pour z suffisamment grand (par exemple $R > 2$) et donc $M = 2$, $k = 6$.

On remarquera que nous avons utilisé l'inégalité $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ avec $z_1 = R^6 e^{6i\theta}$ et $z_2 = 1$.

9. Evaluer $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$.

On considère $\oint_C \frac{dz}{z^6 + 1}$, où C désigne le contour fermé de la figure 7.5 formé du segment, $-R, +R$ et du demi cercle Γ décrit dans le sens direct.

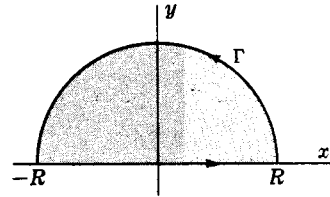


Fig. 7-5

Puisque $z^6 + 1 = 0$ pour $z = e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{7\pi i/6}, e^{9\pi i/6}, e^{11\pi i/6}$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^6 + 1}$. Seuls les pôles $e^{\pi i/6}, e^{3\pi i/6}$ et $e^{5\pi i/6}$ sont à l'intérieur de C d'où en utilisant la règle de L'Hospital :

$$\text{Résidu en } e^{\pi i/6} = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \left\{ (z - e^{\pi i/6}) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6}$$

$$\text{Résidu en } e^{3\pi i/6} = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \left\{ (z - e^{3\pi i/6}) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2}$$

$$\text{Résidu en } e^{5\pi i/6} = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \left\{ (z - e^{5\pi i/6}) \frac{1}{z^6 + 1} \right\} = \lim_{z \rightarrow e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6}$$

$$\text{D'où} \quad \oint_C \frac{dz}{z^6 + 1} = 2\pi i \left\{ \frac{1}{6} e^{-5\pi i/6} + \frac{1}{6} e^{-5\pi i/2} + \frac{1}{6} e^{-25\pi i/6} \right\} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{i.e.,} \quad \int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^6 + 1} = \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

Si l'on prend la limite des deux membres de (1) quand $R \rightarrow \infty$ et si l'on utilise les problèmes 7 et 8 on obtient

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^6 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

De $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$, on déduit que l'intégrale demandée vaut $\pi/3$.

10. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = \frac{7\pi}{50}$.

Les pôles de $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)}$ situés à l'intérieur du contour C de la fig. 7.5 sont $z = i$ d'ordre 2 et $z = -1 + i$ d'ordre 1.

$$\text{Le résidu en } z = i \text{ est } \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i)^2 \frac{z^2}{(z + i)^2 (z - i)^2 (z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{9i - 12}{100}.$$

$$\text{Le résidu en } z = -1 + i \text{ est } \lim_{z \rightarrow -1 + i} (z + 1 - i) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2 (z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \frac{3 - 4i}{25}.$$

$$\text{d'où} \quad \oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} = 2\pi i \left\{ \frac{9i - 12}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right\} = \frac{7\pi}{50}$$

$$\text{ou} \quad \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} + \int_\Gamma \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 2z + 2)} = \frac{7\pi}{50}$$

En prenant la limite de ces expressions quand $R \rightarrow \infty$ et en remarquant que la deuxième intégrale tend vers 0 (problème 7) nous obtenons le résultat demandé.

INTEGRALES DEFINIES DU TYPE $\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

11. Evaluer $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta}$.

Soit $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $dz = iz d\theta$ et alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{3 - 2(z + z^{-1})/2 + (z - z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2 dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

où C est le cercle de rayon 1 centré à l'origine (fig. 7-6).

Les pôles de $\frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ sont les pôles simples

$$\begin{aligned} z &= \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1-2i)(-1-2i)}}{2(1-2i)} \\ &= \frac{-6i \pm 4i}{2(1-2i)} = 2-i, (2-i)/5 \end{aligned}$$

Seul $\frac{2-i}{5}$ est à l'intérieur de C .

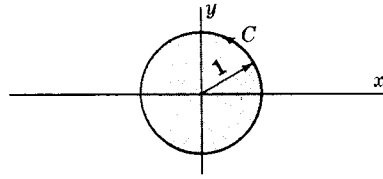


Fig. 7-6

$$\begin{aligned} \text{Le résidu en } \frac{2-i}{5} &= \lim_{z \rightarrow (2-i)/5} \{z - (2-i)/5\} \left\{ \frac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow (2-i)/5} \frac{2}{2(1-2i)z + 6i} = \frac{1}{2i} \text{ d'après la règle de L'Hospital.} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \oint_C \frac{2 dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi, \text{ qui est la valeur demandée.}$$

12. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ if $a > |b|$.

On pose $z = e^{i\theta}$. D'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{a - b(z - z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2 dz}{bz^2 + 2aiz - b}$$

où C est le cercle unité centré à l'origine de la figure 7-6.

Les pôles de $\frac{2}{bz^2 + 2aiz - b}$ sont obtenus en résolvant $bz^2 + 2aiz - b = 0$ et sont donnés par

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4b^2}}{2b} = \frac{-ai \pm \sqrt{a^2 - b^2} i}{b} \\ &= \left\{ \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right\} i, \left\{ \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right\} i \end{aligned}$$

Seul $\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ est à l'intérieur de C , car

$$\left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| = \left| \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 - b^2} + a} \right| = \left| \frac{b}{(\sqrt{a^2 - b^2} + a)} \right| < 1 \text{ si } a > |b|$$

$$\begin{aligned} \text{Le résidu en } \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{bz_1 + ai} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2} i} \end{aligned}$$

d'après la règle de L'Hospital.

$$\text{D'où } \oint_C \frac{2 dz}{bz^2 + 2aiz - b} = 2\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2} i} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ qui est la valeur demandée.}$$

13. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{12}$.

On pose $z = e^{i\theta}$, d'où $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}$, $dz = iz d\theta$ et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \oint_C \frac{(z^3 + z^{-3})/2}{5 - 4(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz$$

où C est le contour de la fig. 7-6.

La fonction à intégrer a un pôle triple en $z = 0$ et un pôle simple $z = \frac{1}{2}$ à l'intérieur de C .

Le résidu en $z = 0$ est $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right\} = \frac{21}{8}$.

Le résidu en $z = \frac{1}{2}$ est $\lim_{z \rightarrow 1/2} \left\{ \left(z - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right\} = -\frac{65}{24}$.

d'où $-\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz = -\frac{1}{2i} (2\pi i) \left\{ \frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right\} = \frac{\pi}{12}$ qui est la valeur demandée.

14. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$.

En posant $z = e^{i\theta}$ on obtient $\sin\theta = (z - z^{-1})/2i$, $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ et

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \oint_C \frac{dz/iz}{\{5-3(z-z^{-1})/2i\}^2} = -\frac{4}{i} \oint_C \frac{z dz}{(3z^2-10iz-3)^2}$$

où C est le contour de la fig. 7-6.

La fonction à intégrer présente des pôles doubles en $z = \frac{10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{10i \pm 8i}{6} = 3i, i/3$. Seul le pôle $i/3$ est à l'intérieur de C .

$$\begin{aligned} \text{Le résidu en } z = i/3 &= \lim_{z \rightarrow i/3} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i/3)^2 \cdot \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow i/3} \frac{d}{dz} \left\{ (z - i/3)^2 \cdot \frac{z}{(3z - i)^2 (z - 3i)^2} \right\} = -\frac{5}{256}. \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad -\frac{4}{i} \oint_C \frac{z dz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} = -\frac{4}{i} (2\pi i) \left(-\frac{5}{256} \right) = \frac{5\pi}{32}$$

Autre méthode.

D'après le problème 12, nous avons pour $a > |b|$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

D'où en différentiant les deux membres de cette égalité par rapport à a (en considérant b comme une constante) à l'aide de la règle de Leibnitz nous en déduisons

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{a + b \sin \theta} \right) d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \sin \theta)^2} \\ &= \frac{d}{da} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) = \frac{-2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\text{i.e.,} \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \sin \theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$$

Pour $a = 5$ et $b = -3$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3 \sin \theta)^2} = \frac{2\pi(5)}{(5^2 - 3^2)^{3/2}} = \frac{5\pi}{32}$$

INTEGRALES DEFINIES DU TYPE $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx$

15. Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{i\theta}$, $k > 0$ et M étant des constantes, montrer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz = 0$$

où Γ est le demi-cercle de la figure 7-5 et m une constante positive.

$$\text{Si } z = Re^{i\theta}, \quad \int_{\Gamma} e^{imz} F(z) dz = \int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} F(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta. \quad \text{D'où}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} F(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^\pi |e^{imRe^{i\theta}} F(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}| d\theta \\
 &= \int_0^\pi |e^{imR \cos \theta - mR \sin \theta} F(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}| d\theta \\
 &= \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} |F(Re^{i\theta})| R d\theta \\
 &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

De plus $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$ comme on le voit géométriquement d'après la figure 7.7 ou d'après le problème 99.

La dernière intégrale est donc inférieure ou égale à

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k} (1 - e^{-mR})$$

qui tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$ car m et k sont positifs ce qui démontre le résultat annoncé.

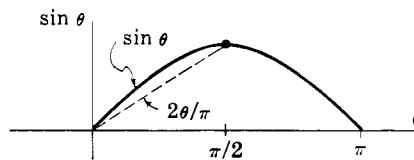


Fig. 7-7

16. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

On considère $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz$ où C est le contour de la figure 7-5. La fonction à intégrer possède des pôles simples $z = \pm i$ mais seul $z = i$ est intérieur à C .

Le résidu en $z = i$ est $\lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{e^{imz}}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{e^{-m}}{2i}$. D'où

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-m}}{2i} \right) = \pi e^{-m}$$

ou
$$\int_{-R}^R \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

i.e.,
$$\int_{-R}^R \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin mx}{x^2 + 1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

et donc
$$2 \int_0^R \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}$$

Si l'on fait tendre R vers ∞ et si l'on utilise le problème 15 pour montrer que l'intégrale le long de Γ tend vers zéro, on obtient le résultat demandé.

17. Calculer $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx$.

On considère $\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz$ où C est le contour de la figure 7-5. La fonction à intégrer présente des pôles simples en $z = -1 \pm 2i$ mais seul $z = -1 + 2i$ est intérieur à C .

Le résidu en $z = -1 + 2i$ est $\lim_{z \rightarrow -1 + 2i} \left\{ (z + 1 - 2i) \cdot \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} \right\} = (-1 + 2i) \frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i}$. On a donc

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = 2\pi i (-1 + 2i) \left(\frac{e^{-i\pi - 2\pi}}{4i} \right) = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}$$

ou
$$\int_{-R}^R \frac{xe^{i\pi x}}{x^2 + 2x + 5} dx + \int_\Gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}$$

i.e.,
$$\int_{-R}^R \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx + i \int_{-R}^R \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx + \int_\Gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}$$

Si l'on fait tendre R vers ∞ et si l'on utilise le problème 15 pour montrer que l'intégrale le long de Γ tend vers zéro, on obtient,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

ce qui donne en égalant les parties réelles et imaginaires

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = -\pi e^{-2\pi}$$

On obtient donc la valeur d'une autre intégrale en plus de celle qui était demandée.

INTEGRALES DEFINIES DIVERSES

18. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

La méthode du problème 16 nous conduit à considérer l'intégrale de e^{iz}/z le long du contour de la figure 7-5. Toutefois étant donné que $z = 0$ appartient au contour d'intégration et qu'une singularité ne peut appartenir à un tel contour, on modifie celui-ci en évitant le point $z = 0$ comme il est montré à la figure 7-8 ; on obtient ainsi le contour C' ou $ABDEFGHJA$.

Le point $z = 0$ étant à l'extérieur de C' , on a

$$\oint_{C'} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ou

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

en changeant x en $-x$ dans la première intégrale et en combinant avec la troisième, on trouve

$$\int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ou

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

On fait tendre $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$. D'après le problème 15, la deuxième intégrale du second membre tend vers zéro. Si l'on pose $z = \epsilon e^{i\theta}$ dans la première intégrale du deuxième membre on voit que sa limite est

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 i e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta = \pi i$$

par passage à la limite sous le symbole d'intégration.

On a donc

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

19. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Soit C le contour de la figure 7-9 ou AB est un arc du cercle centré en O et de rayon R . D'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C e^{iz^2} dz = 0$$

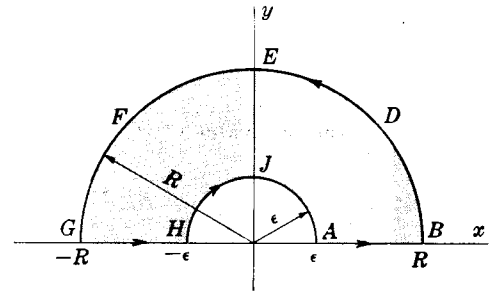


Fig. 7-8

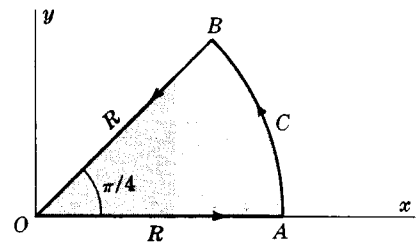


Fig. 7-9

ou

$$\int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0 \quad (1)$$

D'autre part sur OA , $z = x$ (de $x = 0$ à $x = R$) ; sur AB , $z = Re^{i\theta}$ (de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/4$) ; sur BO , $z = re^{i\pi/4}$ (de $r = R$ à $r = 0$). L'égalité (1) devient alors,

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\pi i/2}} e^{\pi i/4} dr = 0 \quad (2)$$

i.e.,

$$\int_0^R (\cos x^2 + i \sin x^2) dx = e^{\pi i/4} \int_0^R e^{-r^2} dr - \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} iRe^{i\theta} d\theta \quad (3)$$

Considérons la limite de (3) quand $R \rightarrow \infty$. La première intégrale du second membre devient [voir problème 14, chapitre 10]

$$e^{\pi i/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (4)$$

La valeur absolue de la deuxième intégrale du second membre de (3) est

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} R d\theta \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \phi} d\phi \\ &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2R^2 \phi/\pi} d\phi \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\phi = 2\theta$ et utilisé l'inégalité $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ (voir problème 15). Ceci montre que si $R \rightarrow \infty$ la deuxième intégrale du second membre de (3) tend vers zéro. Dans ces conditions (3) devient

$$\int_0^\infty (\cos x^2 + i \sin x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et en égalant parties réelles et parties imaginaires on trouve le résultat demandé

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

20. Montrer que $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$.

Considérons $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$. Le point $z = 0$ étant un point

de branchement on utilisera le contour C de la figure 7-10 où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension.

La fonction que l'on intègre a un pôle simple $z = -1$ intérieur à C .

Le résidu en $z = -1 = e^{\pi i}$ est

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

On a donc $\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$ ou en abrégé

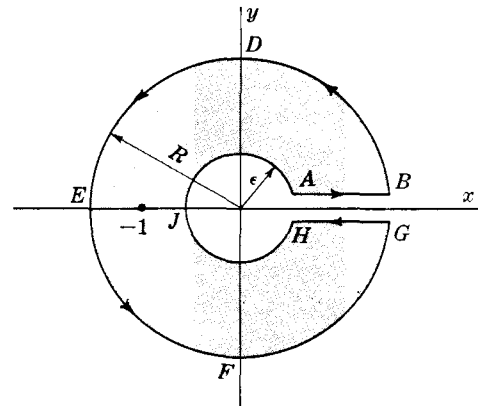


Fig. 7-10

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

On peut donc écrire

$$\int_{\epsilon}^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1} iRe^{i\theta} d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^{\epsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(\epsilon e^{i\theta})^{p-1} i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{1+\epsilon e^{i\theta}} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

où l'on a posé $z = xe^{2\pi i}$ pour l'intégrale le long de GH , l'argument de z ayant augmenté de 2π en parcourant le cercle $BDEFG$.

Si l'on prend la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, remarquant que la deuxième et la quatrième intégrales tendent vers zéro, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx + \int_{\infty}^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)} x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi e^{(p-1)\pi i}$$

ou

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}$$

si bien que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

21. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi a/2)}$ où $|a| < 1$.

Considérons $\oint_C \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z} dz$ où C est un rectangle de sommets $-R$, R , $R + \pi i$, $-R + \pi i$ (voir Fig. 7-11).

Les pôles de $e^{az}/\operatorname{ch} z$ sont simples et sont obtenus pour $\operatorname{ch} z = 0$, i.e. $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Le seul pôle situé à l'intérieur de C est $i\pi/2$.

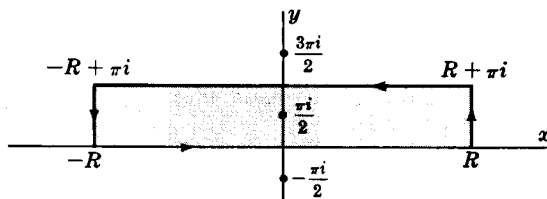


Fig. 7-11

Le résidu de $\frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}$ en $z = i\pi/2$ est

$$\lim_{z \rightarrow i\pi/2} (z - i\pi/2) \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{a\pi i/2}}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = \frac{e^{a\pi i/2}}{i \sin(\pi/2)} = -ie^{a\pi i/2}$$

On a donc d'après le théorème des résidus,

$$\oint_C \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z} dz = 2\pi i (-ie^{a\pi i/2}) = 2\pi e^{a\pi i/2}$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\operatorname{ch}(R+iy)} i dy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)}}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} dx + \int_{\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{\operatorname{ch}(-R+iy)} i dy = 2\pi e^{a\pi i/2} \quad (1)$$

Quand $R \rightarrow \infty$ la deuxième et la quatrième intégrale du premier membre tendent vers zéro. Pour montrer cela considérons la deuxième intégrale ; de

$$|\operatorname{ch}(R+iy)| = \left| \frac{e^{R+iy} + e^{-R-iy}}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \{ |e^{R+iy}| - |e^{-R-iy}| \} = \frac{1}{2} (e^R - e^{-R}) \geq \frac{1}{4} e^R$$

on déduit

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{\operatorname{ch}(R+iy)} i dy \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{aR}}{\frac{1}{4} e^R} dy = 4\pi e^{(a-1)R}$$

et le résultat en découle si l'on remarque que le second membre tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$ car $|a| < 1$.

De la même façon on peut montrer que la quatrième intégrale du premier membre de (1) tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$. L'égalité (1) devient alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx + e^{a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx \right\} = 2\pi e^{a\pi i/2}$$

car $\operatorname{ch}(x + \pi i) = -\operatorname{ch} x$. On a donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{2\pi e^{a\pi i/2}}{1 + e^{a\pi i}} = \frac{2\pi}{e^{a\pi i/2} + e^{-a\pi i/2}} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

De
$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

on tire en changeant x en $-x$ dans la première intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{ch} x} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

22. Démontrer que
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \pi \operatorname{Log} 2.$$

On considère $\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz$ le long du contour C formé d'une portion de l'axe réel de $-R$ à $+R$ et du demi-cercle Γ de rayon R (voir figure 7-12).

Le seul pôle de $\operatorname{Log}(z+i)/(z^2+1)$ intérieur à C est le pôle simple $z = i$, et le résidu est

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i}$$

On a donc d'après le théorème des résidus

$$\oint_C \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \left\{ \frac{\operatorname{Log}(2i)}{2i} \right\} = \pi \operatorname{Log}(2i) = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i \quad (1)$$

en écrivant $\operatorname{Log}(2i) = \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} i = \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} e^{\pi i/2} = \operatorname{Log} 2 + \pi i/2$ utilisant la détermination principale du logarithme. Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\int_{-R}^R \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

$$\int_{-R}^0 \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\operatorname{Log}(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

En changeant x en $-x$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_0^R \frac{\operatorname{Log}(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\operatorname{Log}(i+x)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i$$

où puisque $\operatorname{Log}(i-x) + \operatorname{Log}(i+x) = \operatorname{Log}(i^2 - x^2) = \operatorname{Log}(x^2 + 1) + \pi i$,

$$\int_0^R \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\pi i}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i \quad (2)$$

Quand $R \rightarrow \infty$ on peut montrer que l'intégrale le long de Γ tend vers zéro (voir problème 101). On a alors en prenant les parties réelles et imaginaires

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \operatorname{Log} 2$$

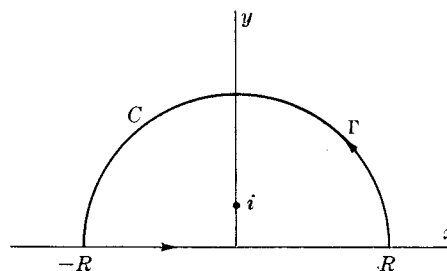


Fig. 7-12

23. Montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \text{Log} \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \text{Log} \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\pi \text{Log} 2$$

En posant $x = \text{tg} \theta$ dans le résultat du problème 22, on trouve

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\text{Log}(\text{tg}^2 \theta + 1)}{\cos^2 \theta (1 + \text{tg}^2 \theta)} d\theta = -2 \int_0^{\pi/2} \text{Log} \cos \theta \, d\theta = \pi \text{Log} 2$$

d'où

$$\int_0^{\pi/2} \text{Log} \cos \theta \, d\theta = -\frac{1}{2}\pi \text{Log} 2 \quad (1)$$

ce qui établit une partie du résultat demandé. En posant $\theta = \pi/2 - \phi$ dans (1), on trouve

$$\int_0^{\pi/2} \text{Log} \sin \phi \, d\phi = -\frac{1}{2}\pi \text{Log} 2$$

SOMMATION DE SERIES

24. Soit C_N le carré de sommets

$$(N + \frac{1}{2})(1 + i), \quad (N + \frac{1}{2})(-1 + i), \\ (N + \frac{1}{2})(-1 - i), \quad (N + \frac{1}{2})(1 - i)$$

représenté à la figure 7.13. Montrer que sur C_N , $|\cotg \pi z| < A$ où A est une constante.

Nous considérerons les parties de C_N situées dans les régions $y > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2}$ et $y < -\frac{1}{2}$.

Cas 1 : $y > \frac{1}{2}$. Dans ce cas si $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} |\cotg \pi z| &= \left| \frac{e^{\pi i x} + e^{-\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{\pi i x - \pi y} + e^{-\pi i x + \pi y}}{e^{\pi i x - \pi y} - e^{-\pi i x + \pi y}} \right| \\ &\leq \frac{|e^{\pi i x - \pi y}| + |e^{-\pi i x + \pi y}|}{|e^{\pi i x - \pi y}| - |e^{-\pi i x + \pi y}|} \\ &= \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1 \end{aligned}$$

Cas 2 : $y < -\frac{1}{2}$. De même que dans le cas 1

$$|\cotg \pi z| \leq \frac{|e^{\pi i x - \pi y}| + |e^{-\pi i x + \pi y}|}{|e^{\pi i x - \pi y}| - |e^{-\pi i x + \pi y}|} = \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = A_1$$

Cas 3 : $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Considérons $z = N + \frac{1}{2} + iy$. Alors

$$|\cotg \pi z| = |\cotg \pi (N + \frac{1}{2} + iy)| = |\cotg (\pi/2 + \pi i y)| = |\text{th} \pi y| \leq \text{th} (\pi/2) = A_2$$

If $z = -N - \frac{1}{2} + iy$, nous avons de même

$$|\cotg \pi z| = |\cotg \pi (-N - \frac{1}{2} + iy)| = |\text{th} \pi y| \leq \text{th} (\pi/2) = A_2$$

Si l'on prend pour A le plus grand des deux nombres A_1 et A_2 , on a $|\cotg \pi z| < A$ sur C_N avec A indépendant de N . Il est intéressant de remarquer que l'on a ici $|\cotg \pi z| \leq A_1 = \coth (\pi/2)$ car $A_2 < A_1$.

25. Soit $f(z)$ telle que le long du contour C_N de la figure 7-13, $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$ où $k > 1$ et M sont des constantes indépendants de N . Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \{ \text{somme des résidus de } \pi \cotg \pi z f(z) \text{ en les pôles de } f(z) \}$$

Cas 1 : $f(z)$ a un nombre fini de pôles.

Dans ce cas on peut choisir N suffisamment grand pour que le contour C_N de la figure 7-13 contienne tous les pôles de $f(z)$. Les pôles de $\cotg \pi z$ sont tous simples et situés en $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

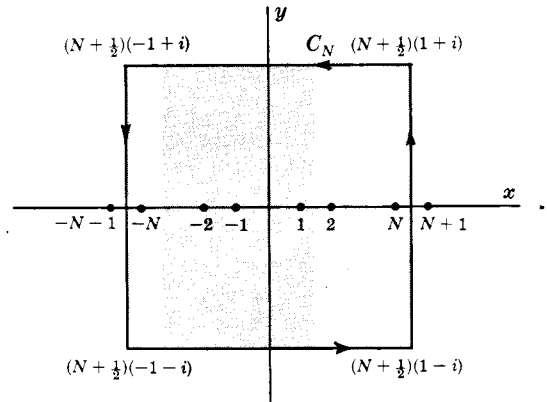


Fig. 7-13

Les résidus de $\pi \cotg \pi z f(z)$ en $z = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont

$$\lim_{z \rightarrow n} (z - n) \pi \cotg \pi z f(z) = \lim_{z \rightarrow n} \pi \left(\frac{z - n}{\sin \pi z} \right) \cos \pi z f(z) = f(n)$$

d'après la règle de L'Hospital. Nous supposons ici que la fonction $f(z)$ n'a pas de pôle en $z = n$ sinon la série donnée divergerait.

D'après le théorème des résidus

$$\oint_{C_N} \pi \cotg \pi z f(z) dz = \sum_{n=-N}^N f(n) + S \quad (1)$$

où S désigne la somme des résidus $\pi \cotg \pi z f(z)$ en les pôles de $f(z)$. D'après le problème 24 et la condition imposée à $f(z)$, nous avons

$$\left| \oint_{C_N} \pi \cotg \pi z f(z) dz \right| \leq \frac{\pi AM}{N^k} (8N + 4)$$

la longueur des chemin C_N étant $8N + 4$. Si l'on passe à la limite quand $N \rightarrow \infty$ nous voyons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} \pi \cotg \pi z f(z) dz = 0 \quad (2)$$

Alors de (1) on déduit ainsi qu'il est demandé

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -S \quad (3)$$

Cas 2 : $f(z)$ possède un nombre de pôles infini.

Si $f(z)$ possède une infinité de pôles on peut obtenir le résultat demandé par un passage convenable à la limite. Voir problème 103.

26. Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$ où $a > 0$.

Soit $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ admettant pour pôles simples $z = \pm ai$.

Le résidu de $\frac{\pi \cotg \pi z}{z^2 + a^2}$ en $z = ai$ est

$$\lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{\pi \cotg \pi z}{(z - ai)(z + ai)} = \frac{\pi \cotg \pi ai}{2ai} = -\frac{\pi}{2a} \coth \pi a$$

De même le résidu en $z = -ai$ est $-\frac{\pi}{2a} \coth \pi a$ et la somme des résidus est $-\frac{\pi}{a} \coth \pi a$. Alors d'après le problème 25,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -(\text{somme des résidus}) = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

27. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}$ où $a > 0$.

Le résultat du problème 26 peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

ou

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a$$

ce qui donne le résultat demandé.

28 Montrer que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\pi \cotg \pi z}{z^2} = \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots\right)}{z^3 \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} - \dots\right)} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} + \dots\right) \end{aligned}$$

si bien que le résidu en $z = 0$ est $-\pi^2/3$.

Alors de même que dans les problèmes 26 et 27,

$$\begin{aligned} \oint_{C_N} \frac{\pi \cotg \pi z}{z^2} dz &= \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Prenant la limite de ces expressions quand $N \rightarrow \infty$ nous avons, le premier membre tendant vers zéro,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Autre méthode. On prend la limite quand $a \rightarrow 0$ du résultat du problème 27. Alors d'après la règle de l'Hospital,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

29. Si $f(z)$ vérifie les conditions du problème 25, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \left\{ \text{somme des résidus de } \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) \text{ en les pôles de } f(z) \right\}$$

Nous utiliserons une méthode semblable à celle du problème 25. Les pôles de $\frac{1}{\sin \pi z}$ sont simples et sont situés en $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Le résidu de $\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z)$ en $z = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, est

$$\lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) = \lim_{z \rightarrow n} \pi \left(\frac{z - n}{\sin \pi z} \right) f(z) = (-1)^n f(n)$$

D'après le théorème des résidus

$$\int_{C_N} \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) dz = \sum_{n=-N}^N (-1)^n f(n) + S \quad (1)$$

où S est la somme des résidus de $\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z)$ en les pôles de $f(z)$.

Quand $N \rightarrow \infty$, l'intégrale au premier membre de (1) tend vers zéro (Problème 106) si bien que (1) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -S \quad (2)$$

30. Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$ où a est réel et différent de $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Soit $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$ qui possède un pôle double en $z = -a$.

Le résidu de $\frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{(z+a)^2}$ en $z = -a$ est

$$\lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left((z+a)^2 \cdot \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{1}{(z+a)^2} \right) = \frac{-\pi^2}{\sin \pi a} \cotg \pi a$$

Alors d'après le problème 29,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = -(\text{somme des résidus}) = \frac{\pi^2}{\sin \pi a} \cotg \pi a = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

31. Montrer que si $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ alors

$$\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2} - \frac{a^2+4}{(a^2-4)^2} + \frac{a^2+9}{(a^2-9)^2} - \dots = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi^2 \cos \pi a}{2 \sin^2 \pi a}$$

Le résultat du problème 30 peut être écrit sous la forme

$$\frac{1}{a^2} - \left\{ \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2} \right\} + \left\{ \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a-2)^2} \right\} - \dots = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2(a^2+1)}{(a^2-1)^2} + \frac{2(a^2+4)}{(a^2-4)^2} - \frac{2(a^2+9)}{(a^2-9)^2} + \dots = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

d'où l'on déduit le résultat demandé. On remarquera que l'on peut effectuer des groupements de termes car la série est absolument convergente.

32. Montrer que $\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}$.

Nous avons

$$F(z) = \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z} = \frac{\pi}{z^3(1 - \pi^2 z^2/2! + \dots)}$$

$$= \frac{\pi}{z^3} \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{2} + \dots \right) = \frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi^3}{2z} + \dots$$

si bien que le résidu en $z = 0$ est $\pi^3/2$.

Le résidu de $F(z)$ en $z = n + \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [pôles simples de $\frac{1}{\cos \pi z}$, est

$$\lim_{z \rightarrow n + \frac{1}{2}} \{z - (n + \frac{1}{2})\} \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z} = \frac{\pi}{(n + \frac{1}{2})^3} \lim_{z \rightarrow n + \frac{1}{2}} \frac{z - (n + \frac{1}{2})}{\cos \pi z} = \frac{-(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3}$$

Si C_N est le carré de sommets $N(1+i)$, $N(1-i)$, $N(-1+i)$, $N(-1-i)$, alors

$$\int_{C_N} \frac{\pi}{z^3 \cos \pi z} dz = - \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3} + \frac{\pi^3}{2} = -8 \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \frac{\pi^3}{2}$$

et comme l'intégrale du premier membre tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 2 \left\{ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right\} = \frac{\pi^3}{16}$$

ce qui établit le résultat cherché.

THEOREME DE MITTAG-LEFFLER

33. Démontrer le théorème de Mittag-Leffler (voir Page 175).

On considère la fonction $f(z)$ ayant pour pôles $z = a_n$, $n = 1, 2, \dots$, et on suppose que $z = \zeta$ n'est pas un pôle de $f(z)$. Alors la fonction $\frac{f(z)}{z - \zeta}$ a pour pôles $z = a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ et ζ .

Le résidu de $\frac{f(z)}{z - \zeta}$ en $z = a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, est $\lim_{z \rightarrow a_n} (z - a_n) \frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{b_n}{a_n - \zeta}$.

Le résidu de $\frac{f(z)}{z - \zeta}$ en $z = \zeta$ est $\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta) \frac{f(z)}{z - \zeta} = f(\zeta)$.

On a donc par le théorème des résidus

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) + \sum_n \frac{b_n}{a_n - \zeta} \quad (1)$$

la dernière sommation étant à prendre pour tous les pôles intérieurs au cercle C_N de rayon R_N (Fig. 7-14).

On suppose que $f(z)$ est analytique en $z = 0$. Si l'on pose $\zeta = 0$ dans (1), nous avons

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum_n \frac{b_n}{a_n} \quad (2)$$

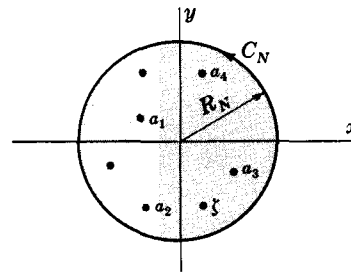


Fig. 7-14

De (2) et (1) on tire par soustraction

$$\begin{aligned} f(\zeta) - f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{a_n - \zeta} - \frac{1}{a_n} \right) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} f(z) \left\{ \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z} \right\} dz \\ &= \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \zeta)} dz \end{aligned} \quad (3)$$

De plus, de $|z - \zeta| \geq |z| - |\zeta| = R_N - |\zeta|$ pour z sur C_N , on tire si $|f(z)| \leq M$,

$$\left| \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \zeta)} dz \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi R_N}{R_N(R_N - |\zeta|)}$$

Quand $N \rightarrow \infty$ et donc quand $R_N \rightarrow \infty$, on en déduit que l'intégrale du premier membre tend vers zéro i.e.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} \frac{f(z)}{z(z - \zeta)} dz = 0$$

Donc d'après (3) quand $N \rightarrow \infty$, nous avons comme il est demandé

$$f(\zeta) = f(0) + \sum_n b_n \left(\frac{1}{\zeta - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

le résultat de la page 175 s'en déduisant en remplaçant ζ par z .

34. Montrer que $\cotg z = \frac{1}{z} + \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$ où la sommation est étendue à $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Considérons la fonction $f(z) = \cotg z - \frac{1}{z} = \frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z}$. Cette fonction a des pôles simples en $z = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, et les résidus en ces pôles sont

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \left(\frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z} \right) = \lim_{z \rightarrow n\pi} \left(\frac{z - n\pi}{\sin z} \right) \lim_{z \rightarrow n\pi} \left(\frac{z \cos z - \sin z}{z} \right) = 1$$

En $z = 0$, $f(z)$ présente une singularité apparente car

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\cotg z - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z} \right) = 0$$

d'après la règle de L'Hospital. On peut donc poser $f(0) = 0$.

D'après le problème 110 on en déduit que $f(z)$ est bornée sur les cercles C_N centrés à l'origine et ayant pour rayon $R_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$. Alors d'après le problème 33

$$\cotg z - \frac{1}{z} = \sum_n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

ce qui démontre le résultat cherché.

35. Montrer que $\cotg z = \frac{1}{z} + 2z \left\{ \frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \dots \right\}$.

On peut écrire le résultat du problème 34 sous la forme

$$\begin{aligned} \cotg z &= \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=-N}^{-1} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{z + \pi} + \frac{1}{z - \pi} \right) + \left(\frac{1}{z + 2\pi} + \frac{1}{z - 2\pi} \right) + \dots + \left(\frac{1}{z + N\pi} + \frac{1}{z - N\pi} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \frac{2z}{z^2 - 4\pi^2} + \dots + \frac{2z}{z^2 - N^2\pi^2} \right\} \\ &= \frac{1}{z} + 2z \left\{ \frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

PROBLEMES DIVERS

36. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz$ où a et t sont des constantes positives quelconques.

La fonction à intégrer présente un point de branchement en $z = -1$. Nous utiliserons comme coupure la partie de l'axe réel définie par $x \leq -1$. Etant donné que l'on ne peut traverser cette coupure, on considère

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz$$

où C est le contour $ABDEFGHJKA$ de la figure 7-15. Dans cette figure EF et HJ sont sur l'axe réel mais ont été représentés séparés pour une meilleure compréhension. FGE est un cercle de rayon ϵ cependant que BDE et JKA sont des arcs de cercle de rayon R .

La fonction $e^{zt}/\sqrt{z+1}$ est analytique à l'intérieur de C et sur C , on a d'après le théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = 0 \quad (1)$$

Ceci peut s'écrire de façon abrégée

$$\int_{AB} + \int_{BDE} + \int_{EF} + \int_{FGH} + \int_{HJ} + \int_{JKA} = 0 \quad (2)$$

On pose sur BDE et JKA , $z = Re^{i\theta}$ où θ varie de θ_0 à π et de π à $2\pi - \theta_0$.

Sur EF , $z + 1 = ue^{\pi i}$, $\sqrt{z+1} = \sqrt{u} e^{\pi i/2} = i\sqrt{u}$; cependant que sur HJ , $z + 1 = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{z+1} = \sqrt{u} e^{-\pi i/2} = -i\sqrt{u}$. Dans les deux cas $z = -u - 1$, où u varie de $R-1$ à ϵ le long de EF et de ϵ à $R-1$ sur HJ .

Sur FGH , $z + 1 = \epsilon e^{i\phi}$ avec ϕ variant de $-\pi$ à π .

Dans ces conditions (2) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \int_{a-iR}^{a+iR} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz + \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{e^{Re^{i\theta}t}}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_{R-1}^{\epsilon} \frac{e^{-(u+1)t} (-du)}{i\sqrt{u}} \\ + \int_{-\pi}^{-\theta_0} \frac{e^{\epsilon e^{i\phi}t}}{\sqrt{\epsilon e^{i\phi}+1}} i\epsilon e^{i\phi} d\phi + \int_{\epsilon}^{R-1} \frac{e^{-(u+1)t} (-du)}{-i\sqrt{u}} \\ + \int_{\pi}^{2\pi-\theta_0} \frac{e^{Re^{i\theta}t}}{\sqrt{Re^{i\theta}+1}} iRe^{i\theta} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$ on peut montrer (voir problème 111) que les deuxième, quatrième et sixième intégrales tendent vers zéro. On a donc

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} 2i \int_{\epsilon}^{R-1} \frac{e^{-(u+1)t}}{\sqrt{u}} du = 2i \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+1)t}}{\sqrt{u}} du$$

ou posant $u = v^2$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z+1}} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+1)t}}{\sqrt{u}} du = \frac{2e^{-t}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2t} dv = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

37. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{(\text{Log } u)^2}{u^2 + 1} du = \frac{\pi^3}{8}$.

Soit C la courbe fermée de la figure 7.16 ci-dessous où P_1 et P_2 sont les demi-cercles de rayon ϵ et R centrés à l'origine. Considérons

$$\oint_C \frac{(\text{Log } z)^2}{z^2 + 1} dz$$

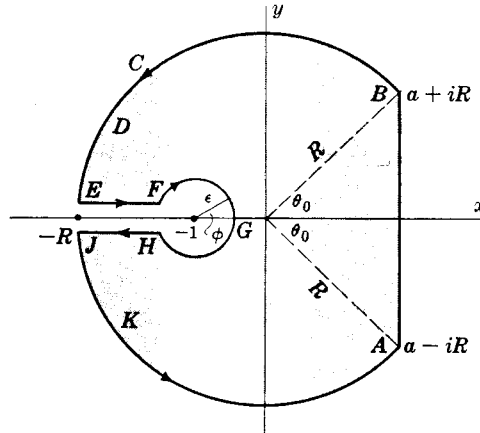


Fig. 7-15

La fonction à intégrer a un pôle simple $z = i$ à l'intérieur de C , le résidu en ce pôle est

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(z-i)(z+i)} &= \frac{(\operatorname{Log} i)^2}{2i} \\ &= \frac{(\pi i/2)^2}{2i} \\ &= \frac{-\pi^2}{8i} \end{aligned}$$

on a donc d'après le théorème des résidus :

$$\oint_C \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{-\pi^2}{8i} \right) = \frac{-\pi^3}{4} \quad (1)$$

D'autre part

$$\oint_C \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz \quad (2)$$

On pose $z = -u$ dans la première intégrale du second membre et l'on a $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-u) = \operatorname{Log} u + \operatorname{Log}(-1) = \pi i$ et $dz = -du$. On pose $z = u$ (et donc $dz = du$ et $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} u$) dans la troisième intégrale du second membre. On trouve alors à l'aide de (1)

$$\int_{\epsilon}^R \frac{(\operatorname{Log} u + \pi i)^2}{u^2+1} du + \int_{\Gamma_1} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{u^2+1} du + \int_{\Gamma_2} \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+1} dz = \frac{-\pi^3}{4}$$

Si l'on fait tendre ϵ vers zéro et $R \rightarrow \infty$ les intégrales le long de Γ_1 et de Γ_2 tendent vers zéro, on a donc

$$\int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} u + \pi i)^2}{u^2+1} du + \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} u)^2}{u^2+1} du = \frac{-\pi^3}{4}$$

ou

$$2 \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} u)^2}{u^2+1} du + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u}{u^2+1} du - \pi^2 \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{-\pi^3}{4}$$

Utilisant le fait que

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

$$2 \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} u)^2}{u^2+1} du + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u}{u^2+1} du = \frac{\pi^3}{4}$$

Egalant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} u)^2}{u^2+1} du = \frac{\pi^3}{8}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} u}{u^2+1} du = 0$$

la deuxième intégrale étant obtenue en supplément.

38. Montrer que

$$\frac{\coth \pi}{1^3} + \frac{\coth 2\pi}{2^3} + \frac{\coth 3\pi}{3^3} + \dots = \frac{7\pi^3}{180}$$

On considère

$$\oint_{C_N} \frac{\pi \cotg \pi z \coth \pi z}{z^3} dz$$

prise le long du carré C_N de la figure 7-17. Les pôles de la fonction à intégrer sont situés en $z = 0$ (pôle d'ordre 5) ; $z = \pm 1, \pm 2, \dots$ (pôles simples) ; $z = \pm i, \pm 2i, \dots$ (pôles simples).

D'après le problème 5 (en remplaçant z par πz) on voit que :

$$\text{Le résidu en } z = 0 \text{ est } \frac{-7\pi^3}{5}$$

$$\text{Le résidu en } z = n \text{ (} n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{) est}$$

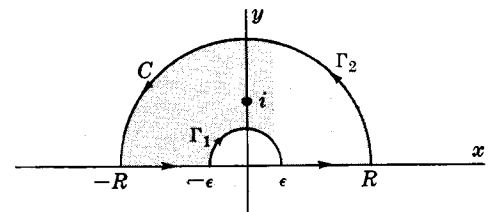


Fig. 7-16

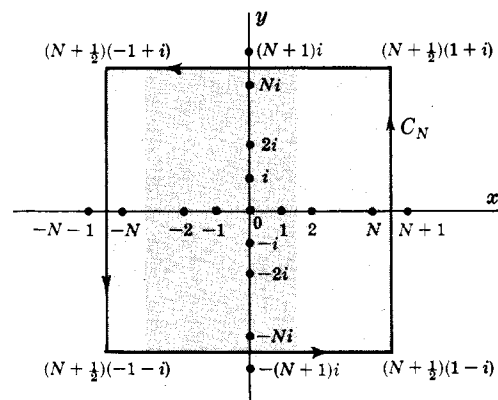


Fig. 7-17

$$\lim_{z \rightarrow ni} \left\{ \frac{(z - ni)}{\operatorname{sh} \pi z} \cdot \frac{\pi \cotg \pi z \cosh \pi z}{z^3} \right\} = \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

Le résidu en $z = ni$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\text{est } \lim_{z \rightarrow n} \left\{ \frac{(z - n)}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cos \pi z \coth \pi z}{z^3} \right\} = \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

On a alors par le théorème des résidus

$$\oint_{C_N} \frac{\pi \cotg \pi z \coth \pi z}{z^3} dz = \frac{-7\pi^3}{45} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{\coth n\pi}{n^3}$$

Si $N \rightarrow \infty$ on trouve comme dans le problème 25 que l'intégrale du premier membre tend vers zéro et le résultat cherché en découle.

Problèmes supplémentaires

RESIDUS – THEOREME DES RESIDUS

39. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les pôles et les résidus en ces pôles :

$$(a) \frac{2z+1}{z^2-z-2}, \quad (b) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2, \quad (c) \frac{\sin z}{z^2}, \quad (d) \frac{1}{\operatorname{ch} z} \quad (e) \cotg z.$$

Rép.

$$(a) z = -1, 2; 1/3, 5/3$$

$$(b) z = 1; 4$$

$$(c) z = 0; 1$$

$$(d) z = \frac{1}{2}(2k+1)\pi i; (-1)^{k+1}i \quad \text{où } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(e) z = k\pi i; 1 \quad \text{où } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

40. Montrer que $\int_C \frac{\operatorname{ch} z}{z^3} dz = \pi i$ si C est le carré de sommets $\pm 2 \pm 2i$.

41. Montrer que le résidu de $\frac{1}{z^3 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}$ en $z = 0$ est $-1/60$.

42. Evaluer $\int_C \frac{e^z dz}{\operatorname{ch} z}$ le long du cercle C défini par $|z| = 5$. Rép. $8\pi i$.

43. Trouver les zéros et les pôles de $f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ et déterminer les résidus en ces pôles.

Rép. Zéros : $z = \pm 2i$ Résidu en $z = 0 : 2$ Le résidu en $z = -1 + i$ est $-\frac{1}{2}(1 - 3i)$. Le résidu en $z = -1 - i$ est $-\frac{1}{2}(1 + 3i)$

44. Calculer $\oint_C e^{-1/z} \sin(1/z) dz$ où C est le cercle $|z| = 1$. Rép. $2\pi i$.

45. Soit C le carré limité par $x = \pm 2, y = \pm 2$. Calculer $\oint_C \frac{\operatorname{sh} 3z}{(z - \pi/4)^3} dz$. Rép. $-9\pi\sqrt{2}/2$

46. Calculer $\oint_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} dz$ où C est (a) $|z - 2i| = 6$, (b) le carré de sommets $1 + i, 2 + i, 2 + 2i, 1 + 2i$.

47. Calculer $\oint_C \frac{2+3\sin \pi z}{z(z-1)^2} dz$ où C est le carré de sommets $3 + 3i, 3 - 3i, -3 + 3i, -3 - 3i$. Rép. $-6\pi i$.

48. Calculer $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} dz, t > 0$ le long du carré de sommets $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$. Rép. $1 - \cos t$.

INTEGRALES DEFINIES

49. Montrer que $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

50. Calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2}.$ Rép. $5\pi/288$

51. Evaluer $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5 - 3 \cos \theta} d\theta.$ Rép. 0

52. Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$ 53. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}.$

54. Montrer que si $m > 0,$ $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1 + m)}{4}.$

55. (a) Déterminer le résidu de $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^5}$ en $z = i.$ (b) Calculer $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^5} dx.$

56. Si $a^2 > b^2 + c^2,$ montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$

57. Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{(5 - 3 \cos \theta)^4} d\theta = \frac{135\pi}{16 \cdot 384}.$

58. Calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$ Rép. $\pi\sqrt{3}/6$

59. Calculer $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$ Rép. $\pi/2$

60. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

61. Examiner la validité de la solution suivante du problème 19. Posons $u = (1 + i)x/\sqrt{2}$ dans le résultat

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ on obtient } \int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2}(1 - i)\sqrt{\pi/2} \quad \text{d'où} \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}$$

en égalant les parties réelles et imaginaires.

62. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}.$

SOMMATION DE SERIES

63. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4} \coth \pi + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{sh}^2 \pi} - \frac{1}{2}.$

64. Montrer que (a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$ (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$

65. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} n \sin n\theta}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha\theta}{\operatorname{sh} \alpha\pi}, \quad -\pi < \theta < \pi.$

66. Montrer que $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$

67. Montrer que $\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{n^4 + 4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2\pi a + \sin 2\pi a}{\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi a} \right\}.$

68. Montrer que $\sum_{n=-\infty}^\infty \sum_{m=-\infty}^\infty \frac{1}{(m^2 + a^2)(n^2 + b^2)} = \frac{\pi^2}{ab} \coth \pi a \coth \pi b.$

THEOREME DE MITTAG-LEFFLER

69. Montrer que $1/\sin z = \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - \dots \right)$.
70. Montrer $1/\operatorname{ch} z = \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 + z^2} - \frac{3}{(3\pi/2)^2 + z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 + z^2} - \dots \right)$.
71. (a) Montrer que $\operatorname{tg} z = 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right)$.
- (b) Utiliser le résultat de (a) pour montrer que $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$.
72. Démontrer les résultats (a) 2, (b) 4, (c) 5, (d) 7, (e) 8 de la page 175.

73. Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4k^2\pi^2} = \frac{1}{2z} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{e^z - 1} \right\}$.

74. Montrer que $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$.

PROBLEMES DIVERS

75. Montrer que le théorème de Cauchy et les formules intégrales de Cauchy peuvent être considérés comme des cas particuliers du théorème des résidus.
76. Montrer que la somme des résidus de la fonction $\frac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10}$ en tous ses pôles est $2/3$.
77. Si n désigne un entier positif montrer que $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta = \frac{2\pi}{n!}$.
78. Calculer $\int_C z^3 e^{1/z} dz$ le long du cercle C d'équation $|z - 1| = 4$. Rép. $1/24$.
79. Montrer que si $f(z)$ remplit des conditions convenables :
- $$(a) \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0), \quad (b) \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos \theta d\theta = -\pi f'(0).$$
80. Montrer que (a) $\int_0^{2\pi} \cos(\cos \theta) \operatorname{ch}(\sin \theta) d\theta = 2\pi$
- (b) $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) \cos \theta d\theta = \pi$.
81. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1} dx = \frac{1}{4} \coth \frac{a}{2} - \frac{1}{2a}$.
- (On pourra intégrer $e^{aiz}/(e^{2\pi z} - 1)$ le long d'un rectangle de sommets $0, R, R + i, i$ et faire tendre R vers l'infini).
82. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi a}$.
83. Si a, p et t désignent des constantes positives, montrer que $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2 + p^2} dz = \frac{\sin pt}{p}$.
84. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \operatorname{Log} 2}{2a}$.
85. Si $-\pi < a < \pi$, montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{\sin a}{\cos a + \operatorname{ch} \lambda}$.

86. Montrer que $\int_0^\infty \frac{dx}{(4x^2 + \pi^2) \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{Log} 2}{2\pi}$.

87. Montrer que (a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{x^4 + 1} dx = \frac{-\pi^2 \sqrt{2}}{16}$, (b) $\int_0^\infty \frac{(\operatorname{Log} x)^2}{x^4 + 1} dx = \frac{3\pi^3 \sqrt{2}}{64}$.

(On pourra considérer $\oint_C \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^4 + 1} dz$ le long d'un demi-cercle échancre en $z = 0$.)

88. Calculer $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{(x^2 + 1)^2} dx$. Rép. $\frac{1}{4}\pi \operatorname{Log} 2$

89. Montrer que si $|a| < 1$ et $b > 0$ $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} x} \cos bx dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin a\pi}{\cos a\pi + \operatorname{ch} b\pi} \right)$.

90. Montrer que si $-1 < p < 1$, $\int_0^\infty \frac{\cos px}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} (p\pi/2)}$.

91. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \operatorname{Log} 2}{2}$.

92. Si $\alpha > 0$ et $-\pi/2 < \beta < \pi/2$, montrer que

(a) $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2 \cos \beta} \cos(\alpha x^2 \sin \beta) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha} \cos(\beta/2)$.

(b) $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2 \cos \beta} \sin(\alpha x^2 \sin \beta) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha} \sin(\beta/2)$.

93. Montrer que $1/\sin^2 z = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{(z - n\pi)^2}$.

94. Si α et p sont réels et tels que $0 < |p| < 1$ et $0 < |\alpha| < \pi$, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p} dx}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} = \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) \left(\frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha} \right)$$

95. Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. [on pourra considérer le contour de la figure 7-18]

96. Démontrer le théorème des résidus pour des domaines multiple-ment connexes.

97. Trouver des conditions suffisantes qui entraînent, si elles sont vérifiées, la validité du théorème des résidus pour un contour C entourant une infinité de singularités isolées.

98. Soit C le cercle d'équation $|z| = 4$. Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\oint_C \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}} dz$$

si elle existe.

99. Donner une démonstration de l'inégalité $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$. [On pourra montrer que la dérivée de $\sin \theta/\theta$ est une fonction décroissante].

100. Montrer que $\int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{4}$.

101. Vérifier que l'intégrale le long de Γ dans l'équation (2) du problème 22 tend vers zéro quand $R \rightarrow \infty$.

102. (a) Si r est réel, montrer que $\int_0^\pi \operatorname{Log}(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| \leq 1 \\ \pi \operatorname{Log} r^2 & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases}$.

(b) Utiliser le résultat de (a) pour calculer $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin \theta d\theta$ (Voir problème 23).

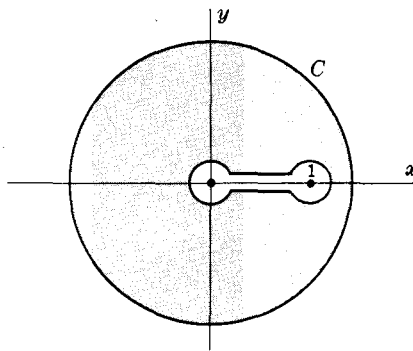


Fig. 7-18

103. Compléter la démonstration du cas 2 dans le problème 25.

104. Si $0 < p < 1$ montrer que $\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x-1} dx = \pi \cotg p\pi$ au sens de la valeur principale de Cauchy.

105. Montrer que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \operatorname{th} \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \right)$

106. Montrer que si $n \rightarrow \infty$, l'intégrale du premier membre de (1) dans le problème 29, tend vers zéro.

107. Montrer que $\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots = \frac{5\pi^5}{1536}$.

108. Démontrer les résultats donnés à la page 175 pour (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ et (b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)$.

109. Si $-\pi \leq \theta \leq \pi$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n^3} = \frac{\theta(\pi-\theta)(\pi+\theta)}{12}$.

110. Montrer que la fonction $\cotg z - 1/z$ du problème 34 est bornée sur les cercles C_N .

111. Montrer que les deuxième, quatrième et sixième intégrales de l'équation (3) du problème 36 tendent vers zéro quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$

112. Montrer que $\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi/2)} - \frac{1}{3 \operatorname{ch}(3\pi/2)} + \frac{1}{5 \operatorname{ch}(5\pi/2)} - \dots = \frac{\pi}{8}$.

113. Montrer que $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ où a et t sont des constantes positives quelconques.

114. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n\pi}{n^7} = \frac{19\pi^7}{56,700}$.

115. Montrer que $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1) \operatorname{ch} \pi x} = \frac{4-\pi}{2}$.

116. Montrer que $\frac{1}{1^3 \operatorname{sh} \pi} - \frac{1}{2^3 \operatorname{sh} 2\pi} + \frac{1}{3^3 \operatorname{sh} 3\pi} - \dots = \frac{\pi^3}{360}$.

117. Montrer que si a et t sont des constantes positives quelconques

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \operatorname{arc} \cotg z dz = \frac{\sin t}{t}$$

Représentation conforme

TRANSFORMATIONS OU REPRESENTATIONS

L'ensemble des équations

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

définit en général une transformation ou une représentation, qui établit une correspondance entre les points du plan des uv et les points du plan des xy . Les équations (1) sont appelées équations de la transformation. Si à chaque point du plan des uv correspond un point et un seul du plan des xy on parlera d'une transformation biunivoque. Dans un tel cas un ensemble de points du plan des xy [tel qu'une courbe ou un ouvert connexe] est appliqué sur un ensemble de points du plan des uv [courbe ou ouvert connexe] et réciproquement. Les ensembles de points qui se correspondent ainsi dans les deux plans sont souvent dits images l'un de l'autre.

JACOBIEEN D'UNE TRANSFORMATION

Un domaine fermé $\mathcal{R}$ du plan des xy est en général transformé par (1) en un domaine fermé $\mathcal{R}$ du plan des uv . Dans ces conditions si ΔA_{xy} et ΔA_{uv} désignent respectivement les aires de ces domaines, on peut montrer que dans le cas où u et v sont continûment différentiables

$$\lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \quad (2)$$

où $\lim$ est à prendre pour ΔA_{xy} (ou ΔA_{uv}) tendant vers zéro et où le déterminant

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

est appelé le jacobien de la transformation (1).

Si l'on résout (1) considéré comme un système d'équations définissant x et y en fonction de u et v , on obtient la transformation $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, souvent appelée transformation inverse de (1). Si x et y sont uniformes et continûment différentiables le jacobien de cette transformation est $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$; on peut démontrer qu'il est égal à l'inverse de $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ [voir problème 7]. Si l'un des deux jacobiens est différent de zéro dans un domaine il en sera donc de même pour l'autre.

Réciproquement on peut montrer que si u et v sont continûment différentiables dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et si le jacobien $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ ne s'annule pas dans $\mathcal{R}$, alors la transformation (1) est biunivoque.

FORME COMPLEXE D'UNE TRANSFORMATION

Il est particulièrement intéressant de considérer le cas où u et v désignent la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$, i.e. $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$.

Dans un tel cas le jacobien de la transformation est

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (4)$$

(voir problème 5). On en déduit que la transformation est biunivoque dans les domaines où $f'(z) \neq 0$. Les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

REPRESENTATION CONFORME

Supposons que par (1) le point (x_0, y_0) du plan des xy soit transformé en le point (u_0, v_0) du plan des uv [Fig. 8-1 et 8-2] cependant que les courbes C_1 et C_2 [se coupant en (x_0, y_0)] sont respectivement transformées en C'_1 et C'_2 [se coupant en (u_0, v_0)]. Une transformation telle que l'angle entre C_1 et C_2 en (x_0, y_0) est égal en grandeur et sens, à l'angle entre C'_1 et C'_2 en (u_0, v_0) , est dite conforme en (x_0, y_0) . Une transformation qui conserve les angles en grandeur mais pas nécessairement en sens, est dite isogonale.

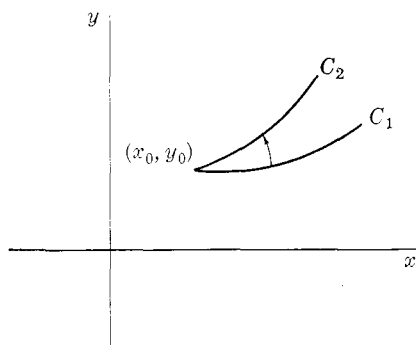


Fig. 8-1

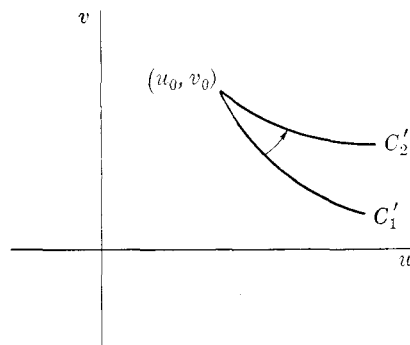


Fig. 8-2

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème. Si $f(z)$ est analytique et si $f'(z) \neq 0$ en tous les points d'un ouvert connexe $\mathcal{R}$, la transformation $w = f(z)$ est conforme en tous les points de $\mathcal{R}$.

Dans le cas des transformations conformes, de petites figures dans le voisinage du point z_0 du plan des z , sont transformées en des figures semblables dans le plan des w , leurs aires sont multipliées par un facteur donné approximativement par $|f'(z_0)|^2$. Les petites distances dans le plan des z au voisinage de z_0 sont de même multipliées approximativement par $|f'(z_0)|$. De grandes figures dans le plan des z sont habituellement représentées par des figures du plan des w qui sont loin d'être semblables.

THEOREME DE RIEMANN SUR LA REPRESENTATION CONFORME

Soit C [Fig. 8-3] une courbe fermée simple du plan des z constituant la frontière d'un ouvert connexe $\mathcal{R}$. Soit d'autre part C' [Fig. 8-4] un cercle de rayon un centré à l'origine [le cercle unité] constituant la frontière d'un ouvert connexe $\mathcal{R}'$ du plan des w . La région $\mathcal{R}'$ est quelquefois appelée le disque unité. Le théorème de Riemann sur la représentation conforme établit qu'il existe une fonction $w = f(z)$, analytique dans $\mathcal{R}$ qui à tout point de $\mathcal{R}$ associe un point de $\mathcal{R}'$ et à tout point de C un point de C' , la correspondance étant biunivoque.

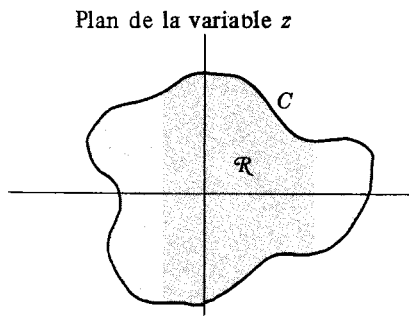


Fig. 8-3

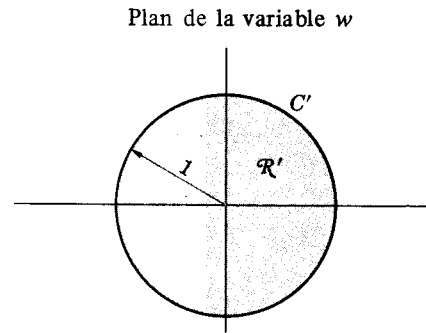


Fig. 8-4

La fonction $f(z)$ considérée dépend de trois constantes arbitraires réelles qui peuvent être déterminées en imposant au centre de C' de se transformer en un point donné de $\mathcal{R}$, et à un point de C' de se transformer en un point donné de C . On remarquera que ce théorème de Riemann établit seulement l'existence de $f(z)$ mais ne donne pas cette fonction.

Il est possible d'étendre ce théorème de Riemann au cas où l'une des régions est bornée par deux courbes fermées simples l'une intérieure à l'autre, la deuxième région étant une couronne circulaire.

POINTS FIXES OU POINTS INVARIANTS D'UNE TRANSFORMATION

Supposons que l'on fasse coïncider le plan des w et le plan des z , on peut alors parler d'une transformation du plan en lui-même. Les points pour lesquels $z = f(z)$ ne changeront pas lors de cette transformation, pour cette raison on les appelle points fixes ou points invariants de la transformation (ou parfois points doubles).

Exemple : Les points fixes ou points invariants de la transformation $w = z^2$, sont solutions de $z^2 = z$ i.e. $z = 0, 1$.

QUELQUES TRANSFORMATIONS GENERALES

Dans les exemples suivants α, β, γ sont des constantes complexes, a, θ_0 étant des constantes réelles.

1. Translation. $w = z + \beta$

Par cette transformation les figures du plan des z sont déplacées ou translatées dans la direction du vecteur β .

2. Rotation. $w = e^{i\theta_0} z$

Par cette transformation les figures du plan des z subissent une rotation d'angle θ_0 .

3. Homothétie. $w = az$

Par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si $a > 1$ (si $0 < a < 1$). On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation.

4. Inversion. $w = 1/z$.

TRANSFORMATIONS SUCCESSIVES

Si $w = f_1(\zeta)$ applique la région $\mathcal{R}_\zeta$ du plan des ζ sur la région $\mathcal{R}_w$ du plan des w cependant que $\zeta = f_2(z)$ applique $\mathcal{R}_z$ du plan des z sur $\mathcal{R}_\zeta$ alors $w = f_1[f_2(z)]$ applique $\mathcal{R}_z$ sur $\mathcal{R}_w$. Les fonctions f_1 et f_2 définissent des transformations successives d'un plan sur un autre, ces transformations étant équivalentes à une seule transformation. Ces idées peuvent être aisément généralisées.

LA TRANSFORMATION LINEAIRE

$$\text{La transformation} \quad w = \alpha z + \beta \quad (5)$$

où α et β sont des constantes complexes est appelée une transformation linéaire. Etant donné que l'on peut écrire (5) au moyen des transformations successives $w = \zeta + \beta$, $\zeta = e^{i\theta_0} \tau$, $\tau = az$ où $\alpha = ae^{i\theta_0}$ on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous forme de produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie.

LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

$$\text{La transformation} \quad w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (6)$$

est appelée transformation homographique. Cette transformation peut être considérée comme le produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie et inversion.

La transformation (6) a la propriété de transformer les cercles du plan des z en cercles du plan des w en considérant que les lignes droites sont des cercles particuliers de rayon infini. Voir problèmes 14 et 15.

La transformation est définie par la donnée de trois points distincts du plan des z et de leurs trois points transformés dans le plan des w , l'un d'entre eux pouvant être à l'infini.

Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont distincts, la quantité

$$\frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)} \quad (7)$$

est appelée *birapport* de z_1, z_2, z_3, z_4 . Ce birapport est invariant par toute transformation homographique et cette propriété peut être utilisée pour obtenir des transformations particulières transformant trois points en trois autres points.

REPRESENTATION D'UN DEMI-PLAN SUR UN CERCLE

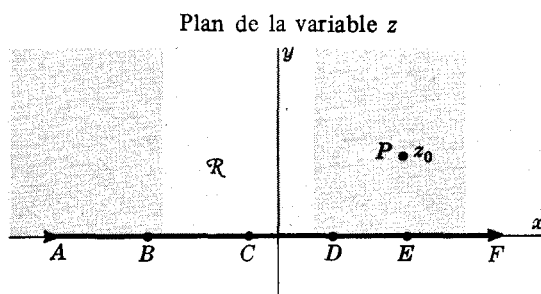


Fig. 8-5

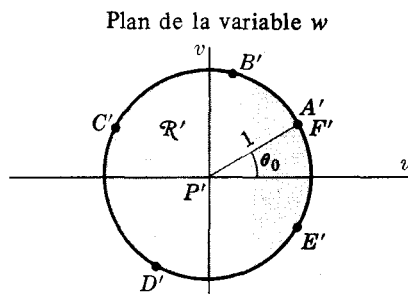


Fig. 8-6

Soit z_0 le nombre complexe attaché à un point quelconque P du demi-plan supérieur $\mathcal{R}$ de la figure 8-5 précédente. La transformation

$$w = e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \quad (8)$$

applique le demi-plan supérieur de façon biunivoque sur l'intérieur $\mathcal{R}'$ du cercle unité $|w| = 1$ et réciproquement. Chaque point de l'axe réel est transformé en un point du cercle. La constante θ_0 peut être déterminée en imposant à un point particulier de l'axe des x , d'être transformé en un point donné du cercle

Dans les figures précédentes et dans celles qui suivent, nous avons désigné par les lettres A, B, C etc. . . les points du plan des z et par les mêmes lettres accentuées A', B', C' etc. . . leurs transformés dans le plan des w . Dans le cas où des points sont à l'infini nous les avons représentés par des flèches, il en est ainsi pour A et F dans la figure 8-5 ; ces points correspondent respectivement à A' et F' (confondus) de la figure 8-6. Quand z décrit la frontière de $\mathcal{R}$ [i.e. l'axe réel] de $-\infty$ (point A) à $+\infty$ (point F), w décrit le cercle unité de A' à A' dans le sens direct.

LA TRANSFORMATION DE SCHWARZ - CHRISTOFFEL

Considérons un polygone [Fig. 8-7] dans le plan des w , ayant pour sommets $w_1, w_2, \dots, w_n$ et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit $w_1, w_2, \dots, w_n$ les points correspondant respectivement à $x_1, x_2, \dots, x_n$ de l'axe réel du plan des z [Fig. 8-8].

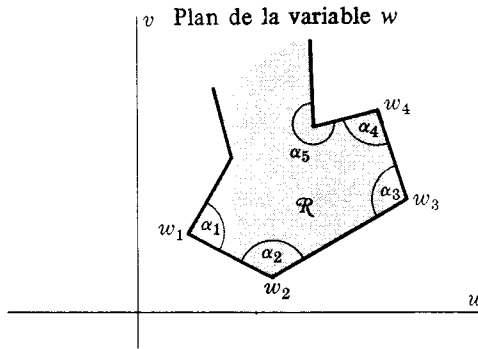


Fig. 8-7

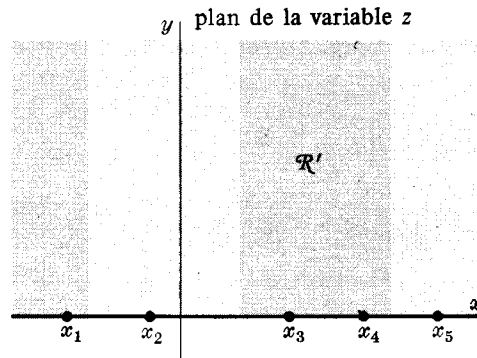


Fig. 8-8

Une transformation qui représente l'intérieur $\mathcal{R}$ du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par

$$\frac{dw}{dz} = A (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (9)$$

ou

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} dz + B \quad (10)$$

où A et B sont des constantes complexes.

On notera que

1. Parmi les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (9) et (10) n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

TRANSFORMATIONS DE FRONTIERES EXPRIMEES SOUS FORME PARAMETRIQUE

Supposons que dans le plan des z une courbe C (Fig. 8-9), fermée ou non, soit représentée paramétriquement par

$$x = F(t), \quad y = G(t) \quad (11)$$

où l'on suppose que F et G sont continûment différentiables. Alors la transformation

$$z = F(w) + iG(w) \quad (12)$$

représente la courbe C sur l'axe réel C' du plan des w [Fig. 8-10].

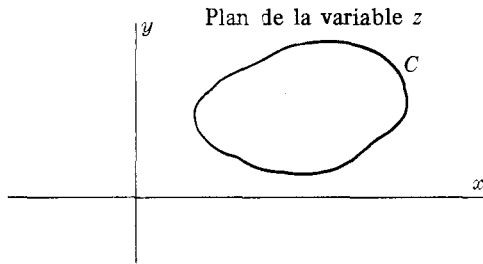


Fig. 8-9

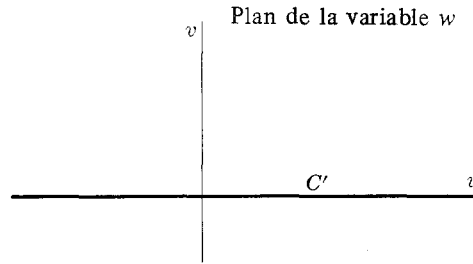


Fig. 8-10

QUELQUES REPRESENTATIONS CONFORMES PARTICULIERES

Nous avons indiqué ici quelques représentations particulières, utiles dans la pratique et pouvant servir de références. Pour plus de commodité nous avons donné séparément les fonctions qui définissent les représentations conformes d'une région donnée $\mathcal{R}$ sur le demi-plan supérieur, puis les représentations sur le cercle unité. Comme nous l'avons déjà vu, il existe une représentation conforme [Equation 8] appliquant le demi-plan supérieur sur le cercle unité.

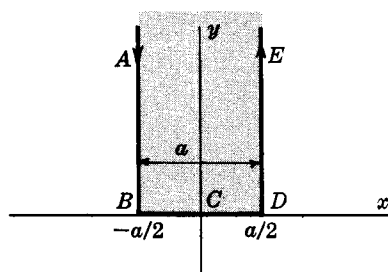
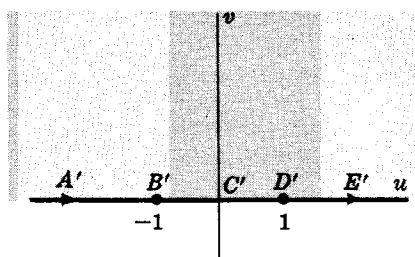
A. REPRESENTATIONS SUR LE DEMI-PLAN SUPERIEUR

A-1	Secteur infini d'angle π/m	$w = z^m, \quad m \geq 1/2$
	Fig. 8-11 Plan de la variable z	Fig. 8-12 Plan de la variable w
A-2	Bande infinie de largeur a	$w = e^{\pi z/a}$
	Fig. 8-13 Plan de la variable z	Fig. 8-14 Plan de la variable w

A-3**Demi-bande de largeur a**

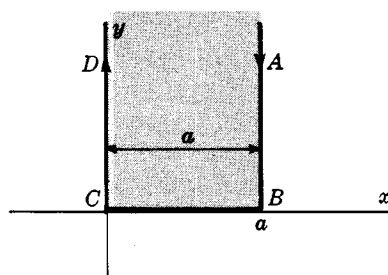
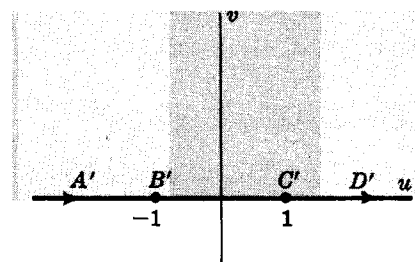
(a)

$$w = \sin \frac{\pi z}{a}$$

Fig. 8-15Plan de la variable z **Fig. 8-16**Plan de la variable w 

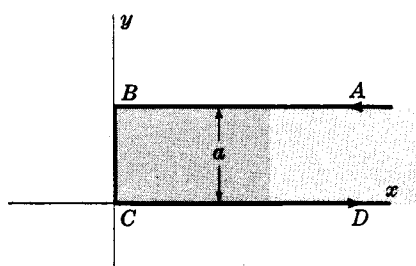
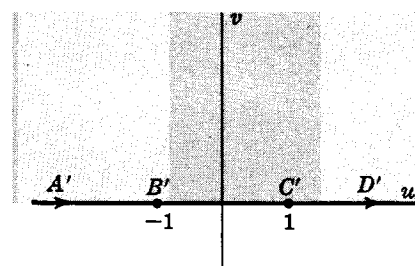
(b)

$$w = \cos \frac{\pi z}{a}$$

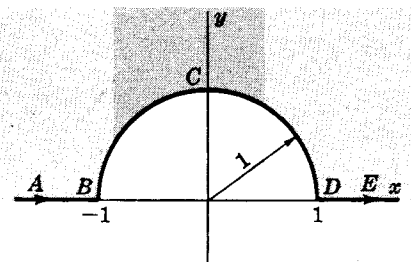
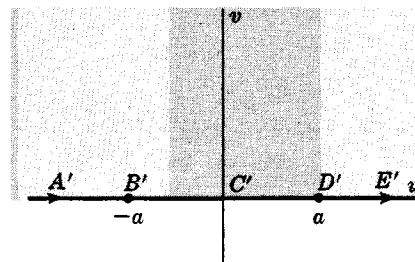
Fig. 8-17Plan de la variable z **Fig. 8-18**Plan de la variable w 

(c)

$$w = \operatorname{ch} \frac{\pi z}{a}$$

Fig. 8-19Plan de la variable z **Fig. 8-20**Plan de la variable w **A-4****Demi-plan échancré d'un demi-cercle**

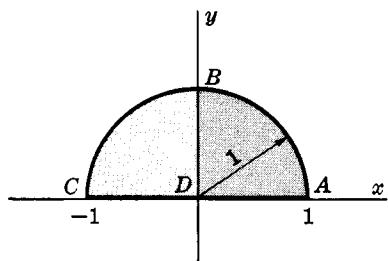
$$w = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

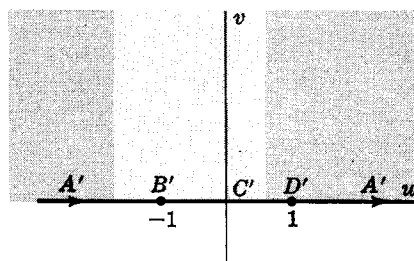
Fig. 8-21Plan de la variable z **Fig. 8-22**Plan de la variable w 

A-5 Demi-cercle

$$w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$$

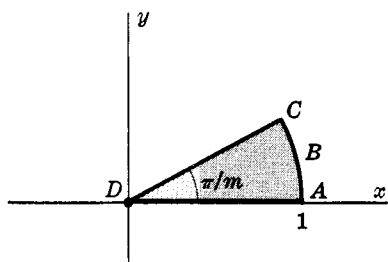
Fig. 8-23

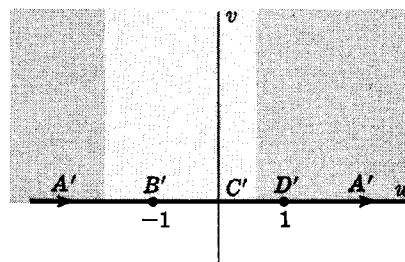
 Plan de la variable z

Fig. 8-24

 Plan de la variable w

A-6 Secteur circulaire

$$w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m} \right)^2, \quad m \geq \frac{1}{2}$$

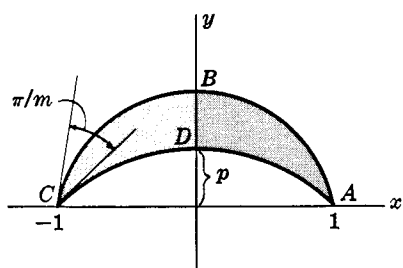
Fig. 8-25

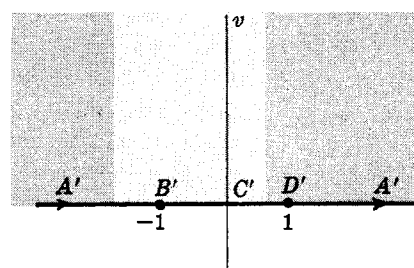
 Plan de la variable z

Fig. 8-26

 Plan de la variable w

A-7 Lunule d'angle π/m
 [ABC et CDA sont des arcs de cercle]

$$w = e^{2mi \operatorname{arccot} p} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m, \quad m \geq 2$$

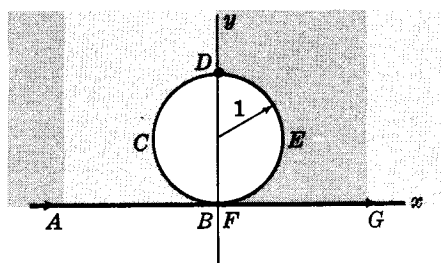
Fig. 8-27

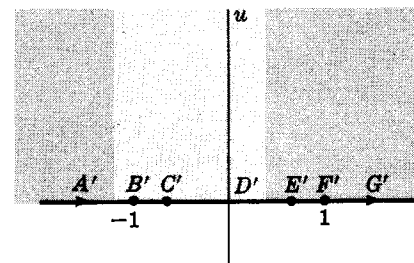
 Plan de la variable z

Fig. 8-28

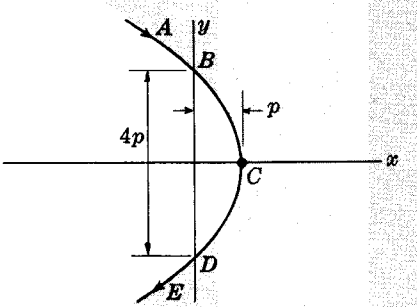
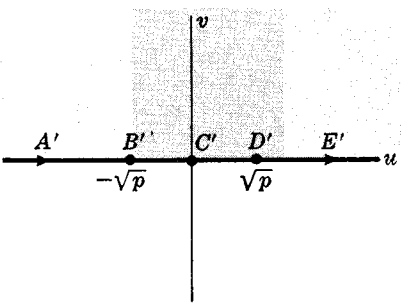
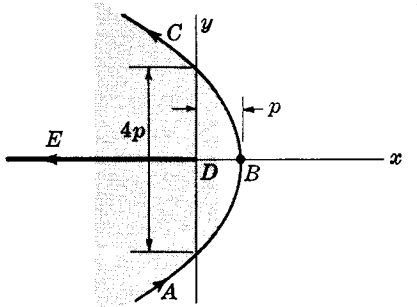
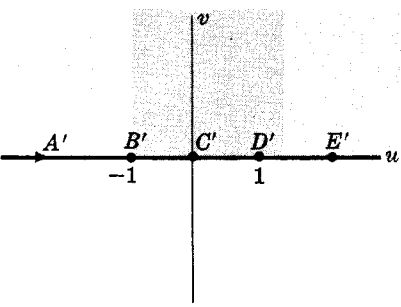
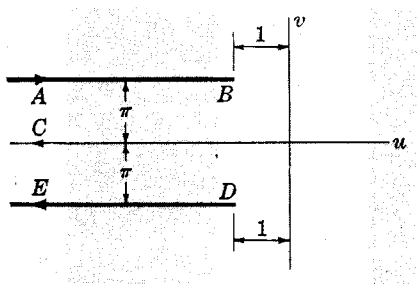
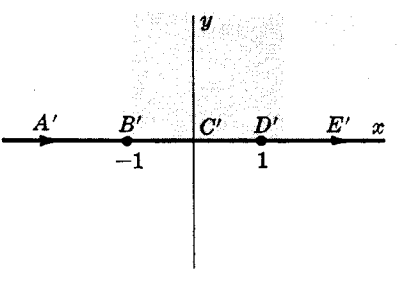
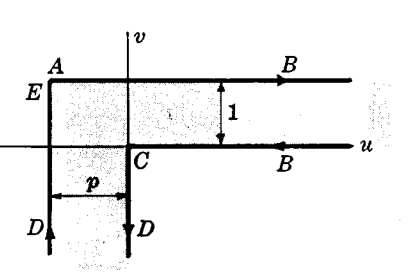
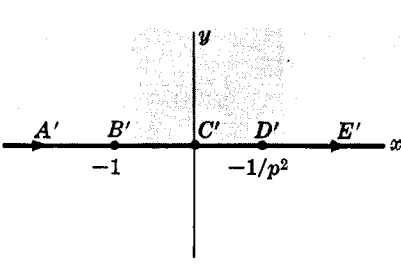
 Plan de la variable w

A-8 Demi-plan échancré d'un cercle

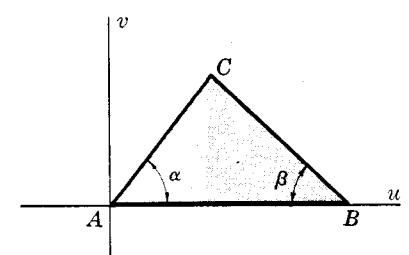
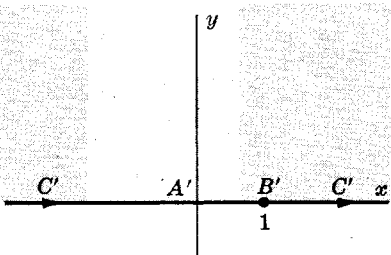
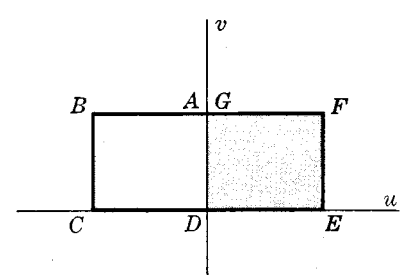
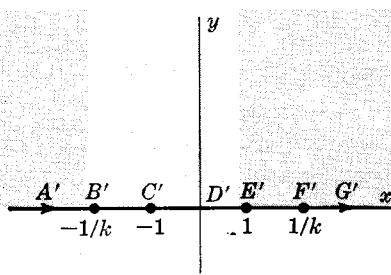
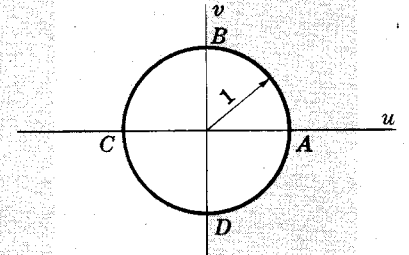
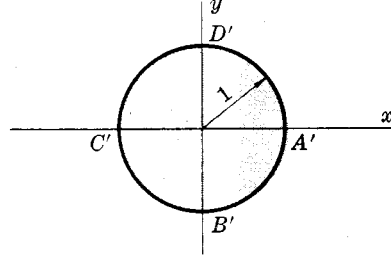
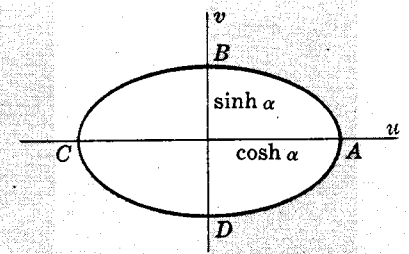
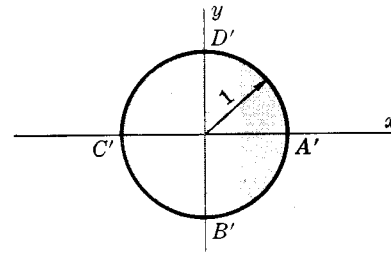
$$w = \coth(\pi/z)$$

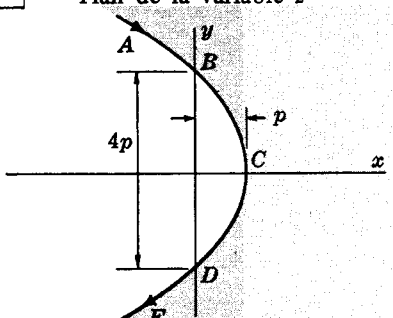
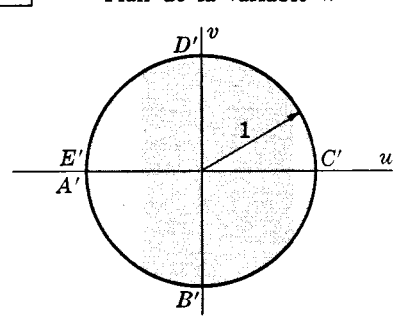
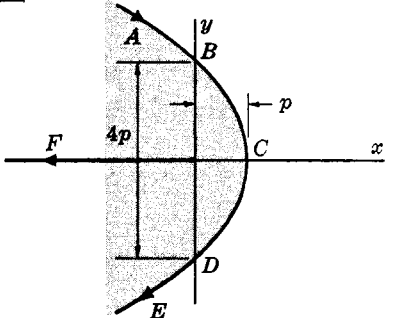
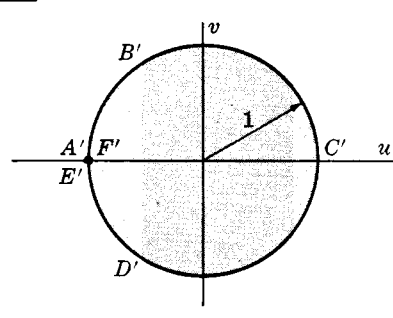
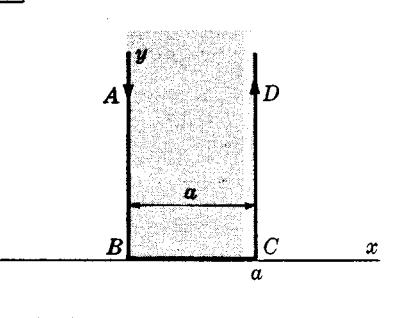
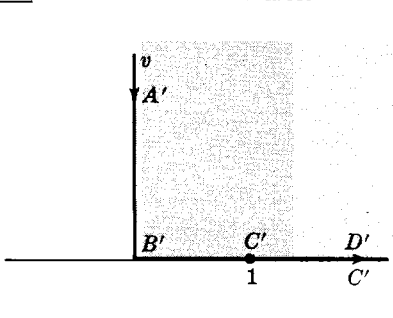
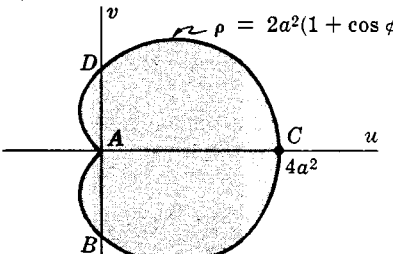
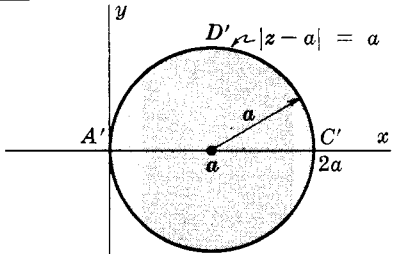
Fig. 8-29

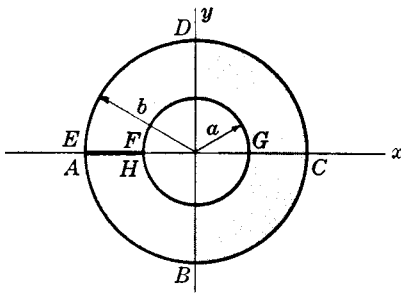
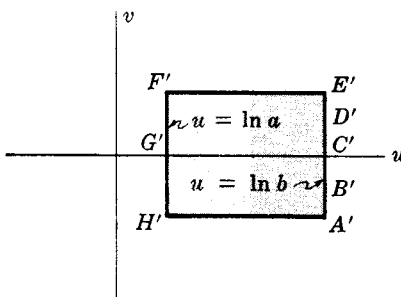
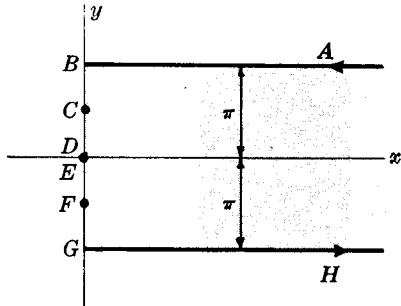
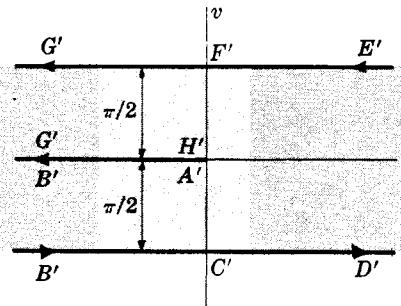
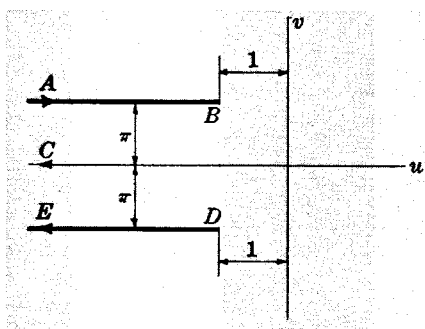
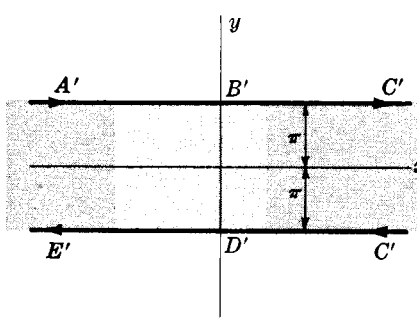
 Plan de la variable z

Fig. 8-30

 Plan de la variable w


A-9	Extérieur de la parabole $y^2 = 4p(p - x)$	$w = i(\sqrt{z} - \sqrt{p})$	
Fig. 8-31	Plan de la variable z 	Fig. 8-32	Plan de la variable w 
A-10	Intérieur de la parabole $y^2 = 4p(p - x)$	$w = e^{\pi i \sqrt{z/p}}$	
Fig. 8-33	Plan de la variable z 	Fig. 8-34	Plan de la variable w 
A-11	Plan privé de deux demi-droites parallèles	$w = -\pi i + 2 \operatorname{Log} z - z^2$	
Fig. 8-35	Plan de la variable w 	Fig. 8-36	Plan de la variable z 
A-12	Canal coudé à angle droit	$w = \frac{2}{\pi} \{ \operatorname{Arg} \operatorname{th} p\sqrt{z} - p \operatorname{arctg} \sqrt{z} \}$	
Fig. 8-37	Plan de la variable w 	Fig. 8-38	Plan de la variable z 

A-13	Intérieur de triangle	$w = \int_0^z t^{\alpha/\pi-1} (1-t)^{\beta/\pi-1} dt$
	Fig. 8-39 Plan de la variable w 	Fig. 8-40 Plan de la variable z 
A-14	Intérieur de rectangle	$w = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad 0 < k < 1$
	Fig. 8-41 Plan de la variable w 	Fig. 8-42 Plan de la variable z 
B. REPRESENTATIONS SUR LE CERCLE UNITE		
B-1	Extérieur du cercle unité	$w = 1/z$
	Fig. 8-43 Plan de la variable w 	Fig. 8-44 Plan de la variable z 
B-2	Extérieur d'une ellipse	$w = \frac{1}{2}(ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha})$
	Fig. 8-45 Plan de la variable w 	Fig. 8-46 Plan de la variable z 

B-3	Extérieur de la parabole $y^2 = 4p(p - x)$	$w = 2\sqrt{\frac{p}{z}} - 1$
Fig. 8-47	Plan de la variable z 	Fig. 8-48 Plan de la variable w 
B-4	Intérieur de la parabole $y^2 = 4p(p - x)$	$w = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{z}{p}}$
Fig. 8-49	Plan de la variable z 	Fig. 8-50 Plan de la variable w 
C. REPRESENTATIONS DIVERSES		
C-1	Demi-bande de largeur a sur un quart de plan	$w = \sin \frac{\pi z}{2a}$
Fig. 8-51	Plan de la variable z 	Fig. 8-52 Plan de la variable w 
C-2	Intérieur d'une cardioïde sur un cercle	$w = z^2$
Fig. 8-53	Plan de la variable w 	Fig. 8-54 Plan de la variable z 

C-3	Couronne circulaire sur un rectangle	$w = \text{Log } z$
	Fig. 8-55 Plan de la variable z 	Fig. 8-56 Plan de la variable w 
C-4	Demi-bande sur une bande infinie	$w = \text{Log coth } (z/2)$
	Fig. 8-57 Plan de la variable z 	Fig. 8-58 Plan de la variable w 
C-5	Plan privé de deux demi-droites parallèles sur une bande infinie	$w = z + e^z$
	Fig. 8-59 Plan de la variable w 	Fig. 8-60 Plan de la variable z 

Problèmes résolus

TRANSFORMATIONS

- On considère le domaine rectangulaire $\mathcal{R}$ [Fig. 8-61 ci-après] du plan des z , limité par $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 1$. Déterminer le domaine $\mathcal{R}'$ du plan des w en lequel $\mathcal{R}$ est transformé par :

(a) $w = z + (1 - 2i)$, (b) $w = \sqrt{2} e^{\pi i/4} z$, (c) $w = \sqrt{2} e^{\pi i/4} z + (1 - 2i)$.

(a) Si $w = z + (1 - 2i)$, alors $u + iv = x + iy + 1 - 2i = (x + 1) + i(y - 2)$ et $u = x + 1$, $v = y - 2$.

La droite $x = 0$ est transformée en $u = 1$; $y = 0$ en $v = -2$; $x = 2$ en $u = 3$; $y = 1$ en $v = -1$ [Fig. 8-62]. On peut montrer que tout point de $\mathcal{R}$ est transformé en un point et un seul de $\mathcal{R}'$ et réciproquement.

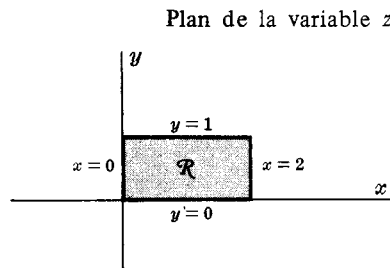


Fig. 8-61

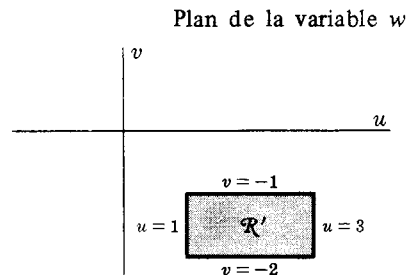


Fig. 8-62

La transformation fait subir une translation au rectangle. En général $w = z + \beta$ fait subir une translation à tout domaine.

- (b) Si $w = \sqrt{2} e^{\pi i/4} z$, alors $u + iv = (1 + i)(x + iy) = x - y + i(x + y)$ et $u = x - y, v = x + y$.

La droite $x = 0$ est transformée en $u = -y, v = y$ ou $u = -v$; $y = 0$ en $u = x, v = x$ ou $u = v$; $x = 2$ en $u = 2 - y, v = 2 + y$ ou $u + v = 4$; $y = 1$ en $u = x - 1, v = x + 1$ ou $v - u = 2$ [Fig. 8-64].

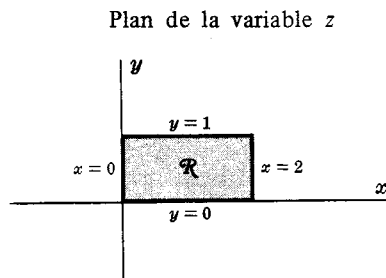


Fig. 8-63

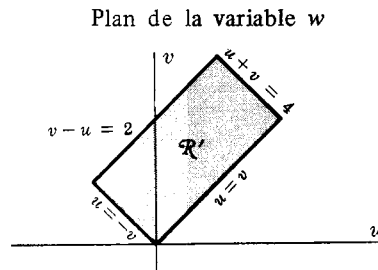


Fig. 8-64

La transformation se décompose en une rotation (d'angle $\pi/4$ ou 45°) et une homothétie (de rapport $\sqrt{2}$). En général la transformation $w = \alpha z$ transforme une région par une rotation suivie d'une homothétie.

- (c) Si $w = \sqrt{2} e^{\pi i/4} z + (1 - 2i)$, alors $u + iv = (1 + i)(x + iy) + 1 - 2i$ et $u = x - y + 1, v = x + y - 2$.

Les droites $x = 0, y = 0, x = 2, y = 1$ sont respectivement transformées en $u + v = -1, u - v = 3, u + v = 3, u - v = 1$ [Fig. 8-66].

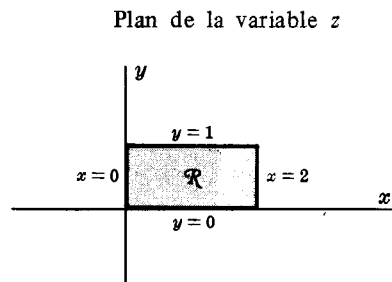


Fig. 8-65

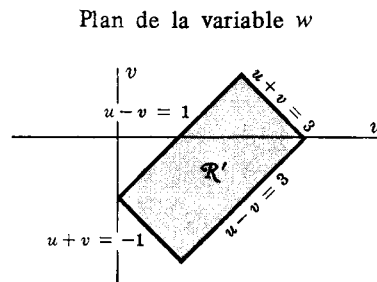


Fig. 8-66

La transformation est le produit d'une rotation et d'une homothétie comme dans (b) suivies d'une translation. En général la transformation $w = \alpha z + \beta$ se décompose en produit de rotation, homothétie et translation ; on peut considérer une telle transformation comme résultat des deux transformations successives $w = \alpha z_1$ (rotation et homothétie) et $z_1 = z + \beta/\alpha$ (translation).

2. Déterminer la région du plan des w en laquelle chacune des régions suivantes est transformée par la transformation $w = z^2$

(a) Premier quadrant du plan des z

Soit $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$. Alors si $w = z^2$, $\rho e^{i\phi} = r^2 e^{2i\theta}$ et $\rho = r^2$, $\phi = 2\theta$. Les points (r, θ) du plan des z subissent donc une rotation d'angle 2θ suivie d'une homothétie de rapport r . Les points du premier quadrant étant tels que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r > 0$ on en déduit que $0 \leq \phi \leq \pi$ et le domaine transformé est le demi-plan supérieur [Fig. 8-67 et 8-68].

Plan de la variable z

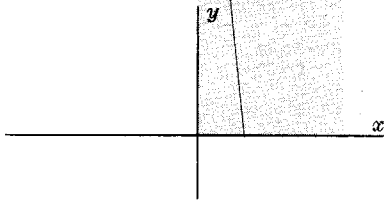


Fig. 8-67

Plan de la variable w

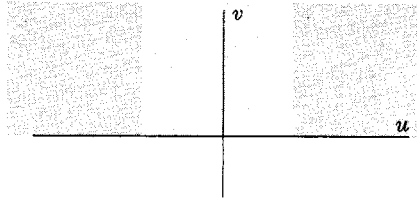


Fig. 8-68

(b) Domaine limité par $x = 1$, $y = 1$ et $x + y = 1$.

De $w = z^2$ qui est équivalent à $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, on tire $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. La droite $x = 1$ se transforme en $u = 1 - y^2$, $v = 2y$ ou $u = 1 - v^2/4$; la droite $y = 1$ en $u = x^2 - 1$, $v = 2x$ ou $u = v^2/4 - 1$; la droite $x + y = 1$ ou $y = 1 - x$ en $u = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$, $v = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2$ ou $v = 1/2(1 - u^2)$ en éliminant x .

Les régions considérées ont été ombrées dans les figures 8-69 et 8-70 ci-dessous. Les points A, B, C se transforment en A', B', C' . On remarquera que les angles du triangle ABC sont égaux aux angles correspondants du triangle curviligne $A'B'C'$. Ceci résulte du fait que la représentation est conforme.

Plan de la variable z

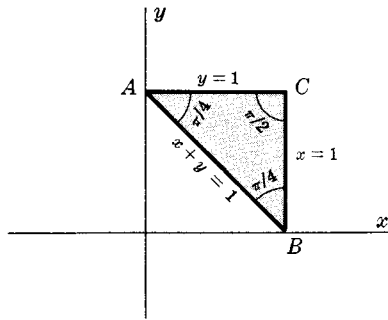


Fig. 8-69

Plan de la variable w

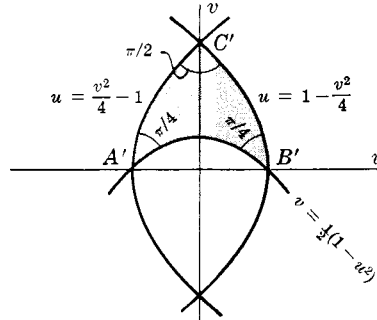


Fig. 8-70

REPRESENTATIONS CONFORMES

3. On considère la transformation $w = f(z)$ où $f(z)$ est analytique en z_0 et où $f'(z) \neq 0$. Montrer que par cette transformation la tangente en z_0 à toute courbe C du plan des z passant par z_0 [Fig. 8-71] subit une rotation d'un angle égal à $\arg f'(z_0)$.

Plan de la variable z

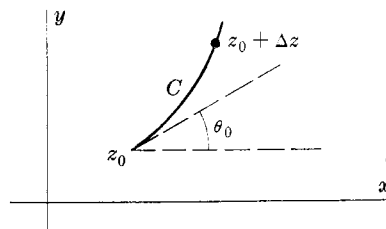


Fig. 8-71

Plan de la variable w

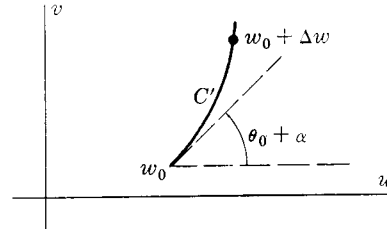


Fig. 8-72

Quand un point décrit C de z_0 à $z_0 + \Delta z$, son image se déplace sur C' de w_0 à $w_0 + \Delta w$. Si la courbe est paramétrée au moyen du paramètre t , alors au chemin $z = z(t)$ [ou $x = x(t)$, $y = y(t)$] du plan des z , correspond le chemin $w = w(t)$ [ou $u = u(t)$, $v = v(t)$] dans le plan des w .

Les dérivées dz/dt et dw/dt représentent les vecteurs tangents en des points correspondants de C et C' .

D'autre part $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z) \frac{dz}{dt}$ et en particulier en z_0 et w_0 ,

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{w=w_0} = f'(z_0) \left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=z_0} \quad (1)$$

pourvu que $f(z)$ soit analytique en $z = z_0$. En écrivant $\left. \frac{dw}{dt} \right|_{w=w_0} = \rho_0 e^{i\phi_0}$, $f'(z) = R e^{i\alpha}$, $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=z_0} = r_0 e^{i\theta_0}$, on tire de (1)

$$\rho_0 e^{i\phi_0} = R r_0 e^{i(\theta_0 + \alpha)} \quad (2)$$

si bien que

$$\phi_0 = \theta_0 + \alpha = \theta_0 + \arg f'(z_0) \quad (3)$$

qui est le résultat demandé. On remarque que si $f'(z_0) = 0$, alors α est indéterminé. Les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques.

4. Montrer que l'angle de deux courbes C_1 et C_2 passant par le point z_0 dans le plan des z [voir figures 8-1 et 8-2 page 201] est conservé [en grandeur et sens] par la transformation $w = f(z)$. i.e. la transformation est conforme si $f(z)$ est analytique en z_0 et si $f'(z_0) \neq 0$.

D'après le problème 3 chaque tangente subit une rotation d'un angle égal à $\arg f'(z_0) \neq 0$. Les angles entre deux courbes sont donc conservés à la fois en grandeur et en sens par une telle transformation.

JACOBIEN D'UNE TRANSFORMATION

5. Si $w = f(z) = u + iv$ est analytique dans $\mathcal{R}$, montrer que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$$

Si $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$, alors les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

sont vérifiées dans $\mathcal{R}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

en utilisant le problème 5, chapitre 3, page 72.

6. Déterminer le jacobien de la transformation de (a) problème 1(c), (b) problème 2 et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

(a) Si $w = f(z) = \sqrt{2} e^{\pi i/4} z + (1 - 2i)$, alors d'après le problème 5 le jacobien

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 = |\sqrt{2} e^{\pi i/4}|^2 = 2$$

Géométriquement ceci montre que toute région du plan des z [en particulier le domaine rectangulaire $\mathcal{R}$ de la figure 8.65 page 212] est transformée en une région d'aire double.

Autre méthode. Les équations de la transformation sont $u = x - y$, $v = x + y$ et donc

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

(b) Si $w = f(z) = z^2$, alors

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 = |2z|^2 = |2x + 2iy|^2 = 4(x^2 + y^2)$$

Géométriquement une petite région du plan des z , d'aire A , située à une distance approximative r de l'origine est transformée en une région du plan des w , d'aire $4r^2A$. Les régions situées loin de l'origine seront plus agrandies que des régions semblables situées plus près de l'origine.

On remarquera qu'au point critique $z = 0$, le jacobien est nul. En ce point la transformation n'est pas conforme.

7. Montrer que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$.

A la transformation (1) $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, de jacobien $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, est associée la transformation inverse (2) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, de jacobien $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

D'après (1),
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

D'après (2),
$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

D'où
$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right\} + \frac{\partial u}{\partial y} \left\{ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right\} du + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right\} dv \end{aligned}$$

et donc
$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

De la même façon on trouve
$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \quad (4)$$

Utilisant (3) et (4) et la règle de formation du produit de deux déterminants (voir problème 94), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

8. Que devient le problème 7 si u et v sont les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique $f(z)$?

Dans ce cas $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2$ d'après le problème 5. Si la transformation de $w = f(z)$ est $z = g(w)$ supposée

uniforme et analytique, alors $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = |g'(w)|^2$. Le résultat du problème 7 est une conséquence du fait que

$$|f'(z)|^2 |g'(w)|^2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \cdot \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = 1$$

car $dw/dz = 1/(dz/dw)$.

TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES

9. Déterminer une transformation homographique qui aux points z_1, z_2, z_3 du plan des z , fait correspondre les points w_1, w_2, w_3 du plan des w .

Si w_k correspond à z_k , $k = 1, 2, 3$, on a

$$w - w_k = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - \frac{\alpha z_k + \beta}{\gamma z_k + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - z_k)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_k + \delta)}$$

$$\text{D'où} \quad w - w_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - z_1)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_1 + \delta)}, \quad w - w_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - z_3)}{(\gamma z + \delta)(\gamma z_3 + \delta)} \quad (1)$$

En remplaçant w par w_2 et z par z_2 , on obtient

$$w_2 - w_1 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_2 - z_1)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_1 + \delta)}, \quad w_2 - w_3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_2 - z_3)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)} \quad (2)$$

Par division de (1) et (2) en supposant

$$\cancel{\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (3)$$

La résolution par rapport à w donne la transformation demandée. Le second membre de (3) est appelé bi-rapport de z_1, z_2, z_3 et z .

10. Trouver une transformation homographique qui fasse correspondre respectivement aux points $z = 0, -i, -1$ les points $w = i, 1, 0$.

Méthode 1. De $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, on tire

$$(1) \quad i = \frac{\alpha(0) + \beta}{\gamma(0) + \delta}, \quad (2) \quad 1 = \frac{\alpha(-i) + \beta}{\gamma(-i) + \delta}, \quad (3) \quad 0 = \frac{\alpha(-1) + \beta}{\gamma(-1) + \delta}$$

D'après (3), $\beta = \alpha$. D'après (1), $\delta = \beta/i = -i\alpha$. D'après (2), $\gamma = i\alpha$. D'où

$$w = \frac{\alpha z + \alpha}{i\alpha z - i\alpha} = \frac{1}{i} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = -i \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$$

Méthode 2. On utilise le problème 9. On a donc

$$\frac{(w-i)(1-0)}{(w-0)(1-i)} = \frac{(z-0)(-i+1)}{(z+1)(-i-0)}. \text{ Soit après résolution, } w = -i \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$$

11. Si z_0 est dans le demi-plan supérieur, montrer que la transformation homographique $w = e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$ transforme la moitié supérieur du plan de la variable z en l'intérieur du cercle unité du plan de la variable w , i.e. $|w| \leq 1$.

On a

$$|w| = \left| e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

D'après la figure 8-73 si z est dans le demi-plan supérieur, $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$, l'égalité n'étant réalisée que si z appartient à l'axe réel. Dans ces conditions on a bien $|w| \leq 1$.

On peut aussi déterminer directement cette transformation (voir problème 61).

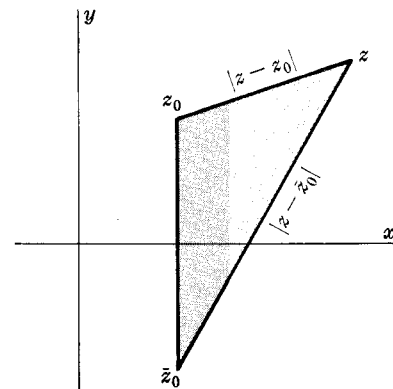


Fig. 8-73

12. Trouver une transformation homographique qui applique la moitié supérieure du plan de la variable z sur le cercle unité de telle façon qu'au point $z = i$ corresponde le point $w = 0$ et au point à l'infini le point $w = -1$.

A $z = i$ correspond $w = 0$ et à $z = \infty$, $w = -1$, de $w = e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$ on tire donc $0 = e^{i\theta_0} \left(\frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0} \right)$

si bien que $z_0 = i$. Donnant à z la valeur $z = \infty$ on en déduit $w = e^{i\theta_0} = -1$; la transformation cherchée est donc

$$w = (-1) \left(\frac{z - i}{z + i} \right) = \frac{i - z}{i + z}$$

On a représenté dans les figures 8-74 et 8-75 les divers points considérés.

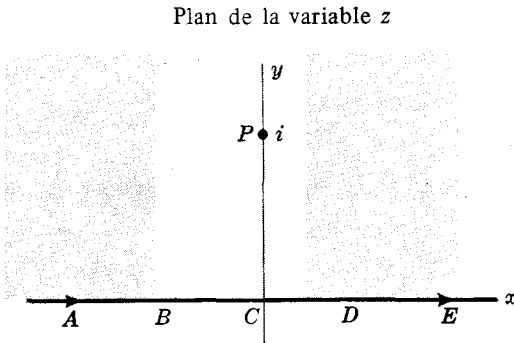


Fig. 8-74

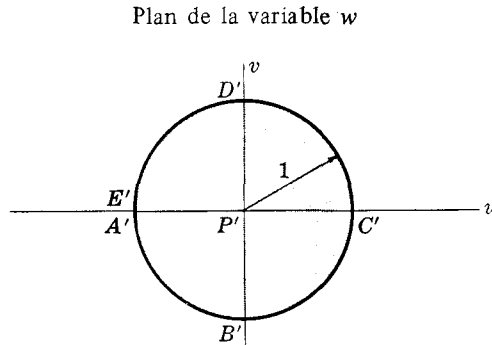


Fig. 8-75

13. Déterminer les points fixes ou invariants de la transformation $w = \frac{2z - 5}{z + 4}$.

Les points fixes sont solutions de $z = \frac{2z - 5}{z + 4}$ ou $z^2 + 2z + 5 = 0$, i.e. $z = -1 \pm 2i$.

14. Montrer que la transformation homographique peut être considérée comme le produit de transformations telles que translation, rotation, homothétie et inversion.

On obtient par division $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \lambda + \frac{\mu}{z + \nu}$ où $\lambda = \alpha/\gamma$, $\mu = (\beta\gamma - \alpha\delta)/\gamma^2$ et $\nu = \delta/\gamma$ sont des constantes. La transformation est équivalente à $\zeta = z + \nu$, $\tau = 1/\zeta$ et $w = \lambda + \mu\tau$ qui sont des produits de translation, rotation, homothétie et inversion.

15. Montrer que la transformation homographique transforme les cercles du plan des z en cercles du plan des w , les droites étant considérées comme des cas particuliers de cercles de rayon infini.

L'équation générale d'un cercle du plan des z est d'après le problème 44, chapitre 1, $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$, où $A > 0$, $C > 0$ et où B est complexe. Si $A = 0$ le cercle se réduit à une droite.

Par une inversion $w = 1/z$ ou $z = 1/w$, cette équation devient $Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0$, qui représente un cercle du plan des w .

Par la similitude $w = az$ ou $z = w/a$, cette équation devient $Aw\bar{w} + (B\bar{a})w + (\bar{B}a)\bar{w} + Ca\bar{a} = 0$, qui est encore un cercle.

De la même façon on peut montrer analytiquement ou géométriquement que sous l'effet d'une translation les cercles sont encore transformés en cercles.

Etant donné d'après le problème 14 qu'une transformation homographique peut être considérée comme le produit des transformations que nous avons envisagées, le résultat demandé se déduit immédiatement du fait que chacune de ces transformations transforme des cercles en cercles.

TRANSFORMATIONS PARTICULIERES

16. Vérifier les résultats (a) A-2, Page 205 (b) A-4, Page 206 (c) B-1, Page 209.

(a) On se reportera aux figures 8-13 et 8-14 page 205.

Si $z = x + iy$, alors

$$w = u + iv = e^{\pi z/a} = e^{\pi(x+iy)/a} = e^{\pi x/a} (\cos \pi y/a + i \sin \pi y/a)$$

ou $u = e^{\pi x/a} \cos \pi y/a$, $v = e^{\pi x/a} \sin \pi y/a$.

La droite $y = 0$ [l'axe réel du plan des z ; DEF dans la figure 8-13] est transformée en $u = e^{\pi x/a}$, $v = 0$ [l'axe positif du plan des w ; $D'E'F'$ dans la figure 8-14]. L'origine $E [z = 0]$ se transforme en $E' [w = 1]$ cependant que $D [x = -\infty, y = 0]$ et $F [x = +\infty, y = 0]$ sont transformés en $D' [w = 0]$ et $F [w = \infty]$.

La droite $y = a$ [ABC dans la figure 8-13] se transforme en $u = -e^{\pi x/a}$, $v = 0$ [l'axe réel négatif du plan des w ; $A'B'C'$ dans la figure 8-14]. Les points $A [x = +\infty, y = a]$ et $C [x = -\infty, y = a]$ sont respectivement transformés en $A' [w = -\infty]$ et $C' [w = 0]$.

Tout point tel que $0 < y < a$, $-\infty < x < \infty$ est transformé de façon biunivoque en un point du plan des uv pour lequel $v > 0$.

(b) On se reportera aux figures 8-21 et 8-22, page 206.

Si $z = re^{i\theta}$, alors

$$w = u + iv = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{a}{2} \left(re^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right) = \frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{ia}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$$

$$\text{et } u = \frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{a}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta.$$

Le demi-cercle $BCD [r = 1, 0 \leq \theta \leq \pi]$ se transforme en le segment $B'C'D' [u = a \cos \theta, v = 0, 0 \leq \theta \leq \pi, \text{ i.e. } -a \leq u \leq a]$.

La droite $DE [\theta = 0, r > 1]$ se transforme en la droite $D'E' \left[u = \frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), v = 0 \right]$; la

droite $AB [\theta = \pi, r > 1]$ se transforme en la droite $A'B' \left[u = -\frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), v = 0 \right]$.

Tout point du plan des z tel que $r \geq 1$ et $0 < \theta < \pi$ est transformé de façon biunivoque en un point du plan des uv tel que $v \geq 0$.

(c) On se reportera aux figures 8-43 et 8-44 page 209.

Si $z = re^{i\theta}$ et $w = \rho e^{i\phi}$, alors $w = 1/z$ devient $\rho e^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ d'où $\rho = 1/r$, $\phi = -\theta$.

Le cercle $ABCD [\rho = 1]$ du plan des w est transformé en le cercle $A'B'C'D' [r = 1]$ du plan des z . On remarque que si $ABCD$ est parcouru dans le sens direct, $A'B'C'D'$ est parcouru dans le sens rétrograde.

Tout point extérieur au cercle $ABCD [\rho > 1]$ est transformé de façon biunivoque en un point intérieur au cercle $A'B'C'D' [r < 1]$.

LA TRANSFORMATION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

17. Etablir la validité du résultat énoncé sur la transformation de Schwarz-Christoffel.

On doit montrer que la fonction définie par

$$\frac{dw}{dz} = A (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (1)$$

représente un polygone donné du plan des w [figure 8-76 ci-dessous] sur l'axe réel du plan des z [figure 8-77 ci-dessous].

Pour démontrer ce résultat, remarquons que l'on déduit de (1)

$$\begin{aligned} \arg dw = \arg dz + \arg A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1 \right) \arg (z - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1 \right) \arg (z - x_2) \\ + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \right) \arg (z - x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Quand z se déplace sur l'axe réel de la gauche vers x_1 montrons que w se déplace sur un côté du polygone vers w_1 . Quand z franchit x_1 de la gauche vers la droite $\theta_1 = \arg (z - x_1)$ varie de π à 0 cependant que tous les autres termes de (2) demeurent constants. Dans ces conditions $\arg dw$ décroît de $(\alpha_1/\pi - 1) \arg (z - x_1) = (\alpha_1/\pi - 1)\pi = \alpha_1 - \pi$ ou ce qui est la même chose, s'accroît de $\pi - \alpha_1$ (l'accroissement étant dans le sens direct).

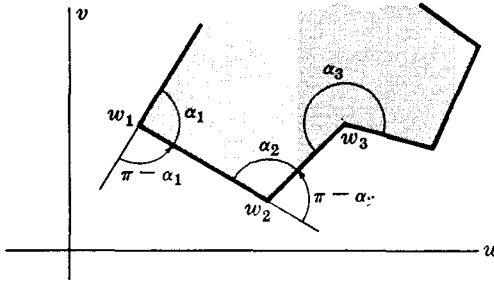
Plan de la variable w


Fig. 8-76

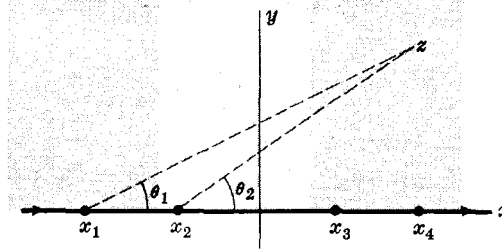
 Plan de la variable z


Fig. 8-77

Il ressort de tout ceci qu'au passage de w_1 l'image de l'axe réel a tourné de $\pi - \alpha_1$, w se trouve donc à présent sur le côté $w_1 w_2$ du polygone.

Quand z franchit x_2 , $\theta_1 = \arg(z - x_1)$ et $\theta_2 = \arg(z - x_2)$ varient de π à 0 cependant que tous les autres termes sont constants. On effectue donc une autre rotation d'angle $\pi - \alpha_2$ dans le plan des w . De proche en proche on voit que si z décrit l'axe des x , w décrit le polygone et réciproquement.

On peut démontrer que l'intérieur du polygone (s'il est fermé) est transformé en le demi-plan supérieur par (1). [Voir problème 26].

18. Montrer que pour des polygones fermés la somme des exposants $\frac{\alpha_1}{\pi} - 1, \frac{\alpha_2}{\pi} - 1, \dots, \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$ de la transformation de Schwarz-Christoffel (9) ou (10) est égale à -2 .

La somme des angles extérieurs d'un polygone étant égale à 2π ,

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + \dots + (\pi - \alpha_n) = 2\pi$$

et l'on obtient alors en divisant par $-\pi$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right) + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1\right) = -2$$

19. Si dans la transformation de Schwarz-Christoffel (9) ou (10) page 204, un point x_n par exemple, est choisi à l'infini alors le dernier facteur n'existe pas.

Dans (9), page 204 posons $A = K/(-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$ où K est une constante ; le deuxième membre de (9) peut alors s'écrire sous la forme

$$K(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_{n-1})^{\alpha_{n-1}/\pi-1} \left(\frac{x_n - z}{x_n}\right)^{\alpha_n/\pi-1}$$

Quand $x_n \rightarrow \infty$, le dernier facteur tend vers 1 ce qui entraîne la disparition de ce terme.

20. Trouver une fonction réalisant la représentation conforme de chacune des régions indiquées du plan des w sur la moitié supérieure du plan des z .

(a)

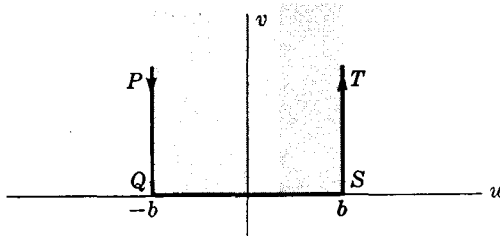
 Plan de la variable w


Fig. 8-78

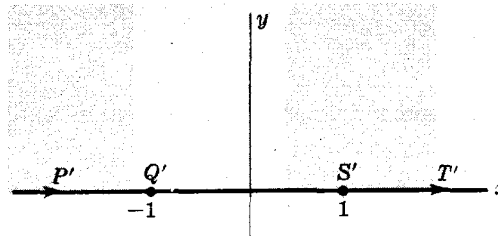
 Plan de la variable z


Fig. 8-79

Soit P' , Q' , S' et T' [figure 8-79 ci-dessus] les transformés de P , Q , S et T [figure 8-78 ci-dessus]. On peut considérer $PQST$ comme un cas limite de polygone (un triangle) dont deux sommets sont Q et S le troisième P ou T étant à l'infini.

Par la transformation de Schwarz-Christoffel, les angles en Q et S valant $\pi/2$, nous avons

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1} = \frac{A}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{K}{\sqrt{1-z^2}}$$

soit par intégration
$$w = K \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B = K \arcsin z + B$$

Pour $z = 1$, $w = b$. D'où (1) $b = K \arcsin(1) + B = K\pi/2 + B$.

Pour $z = -1$, $w = -b$. D'où (2) $-b = K \arcsin(-1) + B = -K\pi/2 + B$.

On déduit de (1) et (2) $B = 0$, $K = 2b/\pi$ d'où

$$w = \frac{2b}{\pi} \arcsin z \quad \text{or} \quad z = \sin \frac{\pi w}{2b}$$

Ce résultat est équivalent à celui donné en A-3(a) dans la table de la page 206 et s'y ramène en changeant les rôles de w et z et en posant $b = a/2$.

(b)

Plan de la variable w

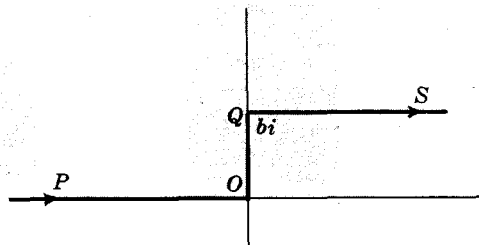


Fig. 8-80

Plan de la variable z

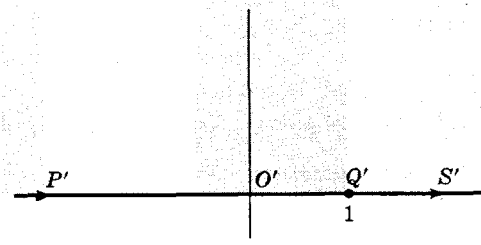


Fig. 8-81

Soit P' , O' , Q' [$z = 1$] et S' les transformés respectifs de P , O , Q [$w = bi$] et S . On remarque que P , S , P' , S' sont à l'infini (ainsi que les flèches l'indiquent) cependant que O et O' sont les origines [$w = 0$ et $z = 0$] du plan des w et du plan des z . Les angles intérieurs en O et Q ayant respectivement pour valeur $\pi/2$ et $3\pi/2$ on a en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel

$$\frac{dw}{dz} = A(z-0)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(z-1)^{\frac{3\pi/2}{\pi}-1} = A\sqrt{\frac{z-1}{z}} = K\sqrt{\frac{1-z}{z}}$$

d'où
$$w = K \int \sqrt{\frac{1-z}{z}} dz$$

Pour calculer cette intégrale on pose $z = \sin^2 \theta$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} w &= 2K \int \cos^2 \theta d\theta = K \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = K(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) + B \\ &= K(\theta + \sin \theta \cos \theta) + B = K(\arcsin \sqrt{z} + \sqrt{z(1-z)}) + B \end{aligned}$$

Quand $z = 0$, $w = 0$ et donc $B = 0$. Quand $z = 1$, $w = bi$ et donc $bi = K\pi/2$ ou $K = 2bi/\pi$. La transformation cherchée est donc

$$w = \frac{2bi}{\pi} (\arcsin \sqrt{z} + \sqrt{z(1-z)})$$

21. Trouver une transformation appliquant un polygone du plan des w sur le cercle unité dans le plan des z .

La transformation de Schwarz-Christoffel permet de mettre en correspondance un polygone du plan des w et l'axe des x du plan des z au moyen de

$$w = A \int (z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1} (z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B \quad (1)$$

Une transformation mettant en correspondance la moitié supérieure du plan des z et le cercle unité du plan des ζ est

$$\zeta = \frac{i-z}{i+z} \quad \text{ou} \quad z = i \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right) \quad (2)$$

en remplaçant w par ζ et posant $\theta = \pi$, $z_0 = i$ dans l'équation (8) page 204.

Si les transformés respectifs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ sur le cercle unité on a pour $k = 1, 2, \dots, n$.

$$z - x_k = i \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right) - i \left(\frac{1-\zeta_k}{1+\zeta_k} \right) = \frac{-2i(\zeta - \zeta_k)}{(1+\zeta)(1+\zeta_k)}$$

D'autre part, $dz = -2i d\zeta / (1+\zeta)^2$, ce qui donne en substituant dans (1) et en utilisant le fait que la valeur de la somme des exposants $\frac{\alpha_1}{\pi} - 1, \frac{\alpha_2}{\pi} - 1, \dots, \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$ est -2 ,

$$w = A' \int (\zeta - \zeta_1)^{\alpha_1/\pi-1} (\zeta - \zeta_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (\zeta - \zeta_n)^{\alpha_n/\pi-1} d\zeta + B$$

qui est la transformation cherchée, A' étant une nouvelle constante arbitraire.

TRANSFORMATIONS DE FRONTIERES EXPRIMEES SOUS FORME PARAMETRIQUE

22. Soit C une courbe du plan des z , d'équation $x = F(t)$, $y = G(t)$. Montrer que la transformation

$$z = F(w) + iG(w)$$

transforme la courbe C en l'axe réel du plan des w .

Si l'on pose $z = x + iy$, $w = u + iv$, la transformation est représentée par

$$x + iy = F(u + iv) + iG(u + iv)$$

Alors $v = 0$ [l'axe réel du plan des w] correspond à $x + iy = F(u) + iG(u)$, i.e. $x = F(u)$, $y = G(u)$, qui représente la courbe C .

23. Déterminer une transformation faisant correspondre à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ du plan des z , l'axe réel du plan des w .

Une représentation paramétrique de l'ellipse est $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ où $a > 0$, $b > 0$. D'après le problème 22 la transformation cherchée est $z = a \cos w + ib \sin w$.

PROBLEMES DIVERS

24. Trouver une fonction transformant l'intérieur d'un triangle du plan des w [figure 8-82] en la moitié supérieure du plan des z .

Soit P' [$z = 0$] et Q' [$z = 1$] les transformés dans le plan des z de P [$w = 0$] et Q [$w = 1$] sommets du triangle considéré le troisième sommet R correspondant à R' [$z = \infty$].

Plan de la variable w

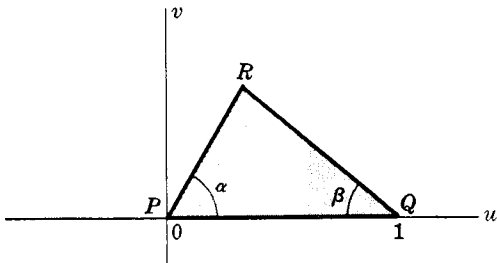


Fig. 8-82

Plan de la variable z

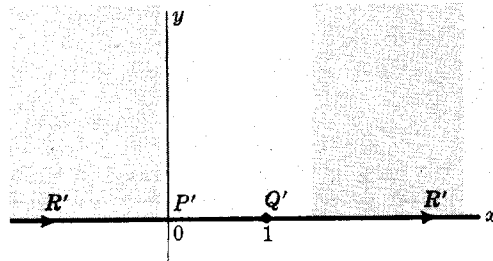


Fig. 8-83

On cherche une transformation de Schwarz-Christoffel de la forme

$$\frac{dw}{dz} = A z^{\alpha/\pi-1} (z-1)^{\beta/\pi-1} = K z^{\alpha/\pi-1} (1-z)^{\beta/\pi-1}$$

D'où par intégration

$$w = K \int_0^z \zeta^{\alpha/\pi-1} (1-\zeta)^{\beta/\pi-1} d\zeta + B$$

Pour $z = 0$, $w = 0$ d'où $B = 0$. Pour $z = 1$, $w = 1$ d'où

$$1 = K \int_0^1 \zeta^{\alpha/\pi-1} (1-\zeta)^{\beta/\pi-1} d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha/\pi) \Gamma(\beta/\pi)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}$$

en utilisant les propriétés des fonctions Γ et B [Chapitre 10]. On a donc

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma(\alpha/\pi) \Gamma(\beta/\pi)}$$

et la transformation cherchée est

$$w = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}{\Gamma(\alpha/\pi) \Gamma(\beta/\pi)} \int_0^z \zeta^{\alpha/\pi-1} (1-\zeta)^{\beta/\pi-1} d\zeta$$

On notera que ce résultat concorde avec celui de la page 209 [A-13] car la longueur du côté AB dans la figure 8-39 est

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha/\pi-1} (1-\zeta)^{\beta/\pi-1} d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha/\pi) \Gamma(\beta/\pi)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{\pi}\right)}$$

25. (a) Trouver une fonction faisant correspondre à la région ombrée de la figure 8-84 la moitié supérieure du plan des z . [figure 8-85].

(b) Que se passe-t-il quand $b \rightarrow 0$?

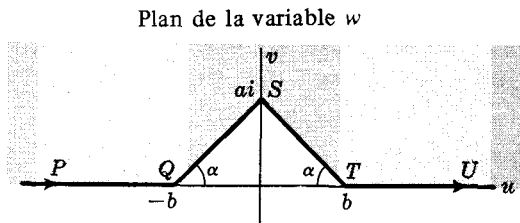


Fig. 8-84

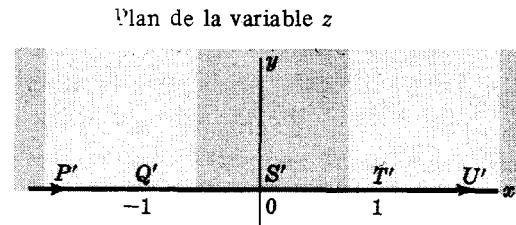


Fig. 8-85

(a) Les angles intérieurs en Q et T valent $\pi - \alpha$, cependant que l'angle en S vaut $2\pi - (\pi - 2\alpha) = \pi + 2\alpha$. On cherchera une transformation de Schwarz-Christoffel de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= A (z+1)^{(\pi-\alpha)/\pi-1} z^{(\pi+2\alpha)/\pi-1} (z-1)^{(\pi-\alpha)/\pi-1} \\ &= \frac{A z^{2\alpha/\pi}}{(z^2-1)^{\alpha/\pi}} = \frac{K z^{2\alpha/\pi}}{(1-z^2)^{\alpha/\pi}} \end{aligned}$$

D'où par intégration

$$w = K \int_0^z \frac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{(1-\zeta^2)^{\alpha/\pi}} d\zeta + B$$

Quand $z = 0$, $w = ai$; et donc $B = ai$ d'où

$$w = K \int_0^z \frac{\zeta^{2\alpha/\pi}}{(1-\zeta^2)^{\alpha/\pi}} d\zeta + ai \quad (1)$$

La valeur de K peut s'exprimer à l'aide de la fonction Γ en utilisant le fait que $w = b$ si $z = 1$ [Problème 102]. On trouve

$$K = \frac{(b-ai)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)} \quad (2)$$

(b) Quand $b \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pi/2$ et le résultat de (a) devient

$$\begin{aligned} w &= ai - ai \int_0^z \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = ai\sqrt{1-z^2} \\ &= a\sqrt{z^2-1} \end{aligned}$$

Dans ce cas la figure 8-84 devient la figure 8-86. Dans ce cas le résultat peut être obtenu directement en appliquant une transformation de Schwarz-Christoffel au contour polygonal $PQSTU$ dont les angles respectifs en Q , S et T sont $\pi/2$, 2π et $\pi/2$.

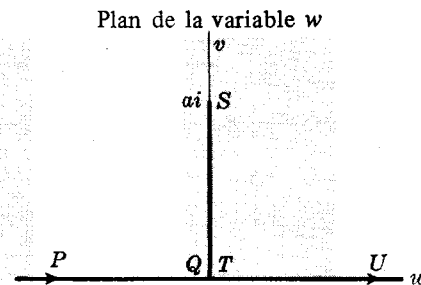


Fig. 8-86

26. Démontrer que la transformation de Schwarz-Christoffel du problème 17 représente l'intérieur du polygone sur le demi-plan supérieur.

Il suffit de montrer que la transformation représente l'intérieur du polygone sur l'intérieur du cercle unité car nous savons [problème 11] que l'intérieur du cercle unité peut être transformé de façon biunivoque en le demi-plan supérieur.

Supposons que la fonction $w = f(z)$ utilisée pour faire correspondre le polygone P au cercle unité C soit analytique à l'intérieur de C .

Nous devons montrer qu'à tout point a intérieur à P correspond un point z_0 et un seul tel que $f(z_0) = a$.

Le point a étant intérieur à P , la formule intégrale de Cauchy s'écrit

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_P \frac{dw}{w-a} = 1$$

D'où tenant compte de $w - a = f(z) - a$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz = 1$$

Mais $f(z) - a$ est analytique dans C et d'après le problème 17, chapitre 5, nous avons montré qu'il y a un seul zéro (noté z_0) de $f(z) - a$ intérieur à C , i.e. $f(z_0) = a$.

27. Soit C un cercle du plan des z , centré sur l'axe réel, passant par $z = 1$ et contenant $z = -1$. Trouver l'image de C par la transformation $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

Nous avons $dw/dz = \frac{1}{2}(1 - 1/z^2)$. Comme $dw/dz = 0$ en $z = 1$ le point $z = 1$ est un point critique. La série de Taylor de $f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ au voisinage de $z = 1$ s'écrit sous la forme

$$w - 1 = \frac{1}{2}[(z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - \dots]$$

D'après le problème 100 nous voyons que les angles dont le sommet est en $z = 1$ sont doublés par cette transformation. En particulier l'angle en $z = 1$ extérieur à C valant π , l'angle en $w = 1$ extérieur à l'image C' sera 2π . Dans ces conditions C' possède un point de rebroussement en $w = 1$ (voir figure 8-88). D'autres points de C' peuvent être déterminés directement.

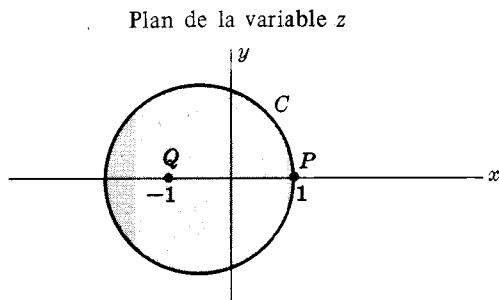


Fig. 8-87

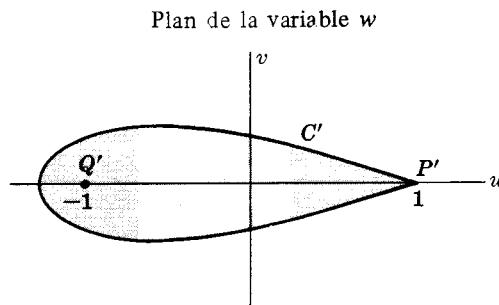


Fig. 8-88

Il est intéressant de remarquer que dans le cas présent C entoure le cercle $|z| = 1$ qui est transformé en le segment $-1, +1$. Donc quand C tend vers ce cercle, C' se rapproche du segment de droite joignant -1 et $+1$.

28. On suppose que le cercle du problème 27 se déplace de façon que son centre soit dans le demi-plan supérieur sans cesser d'entourer $z = -1$ ni de passer par $z = 1$. Déterminer l'image de C par la transformation $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

Comme dans le problème 27, $z = 1$ étant un point critique, nous aurons un rebroussement au point $w = 1$ [figure 8-90]. Si le cercle $|z| = 1$ n'est pas tout entier à l'intérieur de C [comme dans la figure 8-89] l'image C' n'entoure pas complètement l'image de $|z| = 1$ [qui est le segment $-1, +1$], C' n'entourera que la partie du segment $-1, +1$ qui correspond à la portion de $|z| = 1$ intérieure à C . C' se présente alors sous la forme indiquée à la figure 8-90. Quand C varie on obtient d'autres formes semblables pour C' .

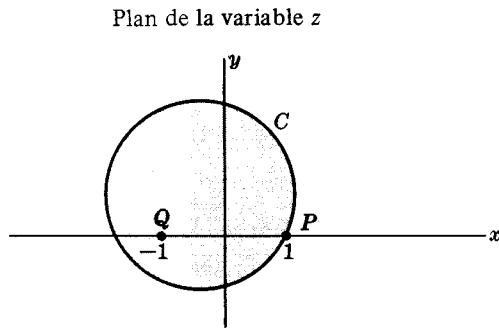


Fig. 8-89

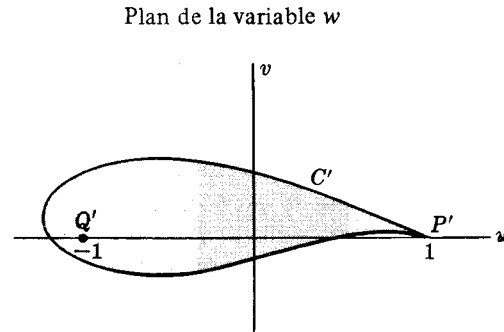


Fig. 8-90

Le fait que C' présente une ressemblance avec un profil d'aile d'avion est important en aérodynamique (voir chapitre 10) et fut utilisé d'abord par *Joukowski*. Pour cette raison des formes analogues à celle de C' sont appelées *profils de Joukowski* et $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ est appelée une *transformation de Joukowski*.

Problèmes supplémentaires

TRANSFORMATIONS

29. Soit T un triangle du plan des z de sommets $i, 1 - i, 1 + i$. Déterminer le triangle T' en lequel T est transformé par chacune des transformations (a) $w = 3z + 4 - 2i$, (b) $w = iz + 2 - i$, (c) $w = 5e^{\pi i/3}z - 2 + 4i$. Quelle relation y a-t-il entre T et T' dans chacun de ces cas ?
30. Représenter la région du plan des w en laquelle l'intérieur du triangle T [problème 29] est transformé par (a) $w = z^2$, (b) $w = iz^2 + (2 - i)z$, (c) $w = z + 1/z$.
31. (a) Montrer que par la transformation $w = 1/z$ le cercle C défini par $|z - 3| = 5$ est transformé en le cercle $|w + 3/16| = 5/16$. (b) En quelle région l'intérieur de C est-il transformé ?
32. (a) Montrer que par la transformation $w = (z - i)/(iz - 1)$ la région $\text{Im}\{z\} \geq 0$ est transformée en la région $|w| \leq 1$. (b) En quelle région $\text{Im}\{z\} \leq 0$ est-elle transformée ?
33. (a) Montrer que la transformation $w = \frac{1}{2}(ze^{-\alpha} + z^{-1}e^{\alpha})$ où α est réel applique l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sur l'extérieur d'une ellipse [voir la partie B-2 dans la table de la page 209].
(b) Trouver les longueurs des axes de l'ellipse de (a) ; construire cette ellipse.
Rép. (b) $2 \text{ ch } \alpha, 2 \text{ sh } \alpha$.
34. Déterminer l'équation de la courbe du plan des w en laquelle la droite $x + y = 1$ est transformée par (a) $w = z^2$, (b) $w = 1/z$.
Rép. (a) $u^2 + 2v = 1$, (b) $u^2 + 2uv + 2v^2 = u + v$

35. Montrer que la transformation $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2/3}$ fait correspondre au cercle unité une région en forme de coin que l'on représentera graphiquement.
36. (a) Montrer que la transformation $w = 2z - 3i\bar{z} + 5 - 4i$ est équivalente à $u = 2x + 3y + 5$, $v = 2y - 3x - 4$.
 (b) Déterminer le triangle du plan des uv en lequel est transformé le triangle T du problème 29 par la transformation de (a). Les triangles sont-ils semblables ?
37. Exprimer les transformations (a) $u = 4x^2 - 8y$, $v = 8x - 4y^2$ et (b) $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$ sous la forme $w = F(z, \bar{z})$. Rép. (a) $w = (1-i)(z^2 + \bar{z}^2) + (2-2i)z\bar{z} + 8iz$, (b) $w = z^3$.

REPRESENTATIONS CONFORMES

38. On considère les transformés par $w = z^2$ des droites $y = 2x$, $x + y = 6$ du plan des xy . (a) Représenter graphiquement les images de ces droites dans le plan des w . (b) Montrer analytiquement que l'angle des deux droites est égal à l'angle de leurs transformés et expliquer pourquoi il en est ainsi.
39. Reprendre le problème 38 avec les transformations (a) $w = \frac{1}{z}$, (b) $w = \frac{z-1}{z+1}$.
40. L'intérieur du carré $\mathcal{J}$ de sommets $1, 2, 1+i, 2+i$ est transformé en une région $\mathcal{J}'$ par les transformations (a) $w = 2z + 5 - 3i$, (b) $w = z^2$, (c) $w = \sin \pi z$. Représenter graphiquement $\mathcal{J}'$ dans chacun de ces cas et vérifier directement que les angles intérieurs de $\mathcal{J}'$ sont droits.
41. (a) Représenter graphiquement les images du cercle $(x-3)^2 + y^2 = 2$ et de la droite $2x + 3y = 7$ par la transformation $w = 1/z$. (b) Les images du cercle et de la droite se coupent-elles selon un angle égal à l'angle des courbes initiales ? Expliquer.
42. Reprendre le problème 41 avec le cercle $(x-3)^2 + y^2 = 5$ et la droite $2x + 3y = 14$.
43. (a) Résoudre le problème 38 avec la transformation $w = 3z - 2i\bar{z}$.
 (b) Votre réponse à la partie (b) est-elle la même ? Expliquer.
44. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la transformation $w = F(z, \bar{z})$ soit conforme dans une région $\mathcal{A}$ est que $\partial F / \partial \bar{z} = 0$ et $\partial F / \partial z \neq 0$ dans $\mathcal{A}$, quelle en est la signification ?

JACOBIENS

45. (a) Pour chaque partie du problème 29 déterminer le rapport des aires T et T' . (b) Comparer vos résultats de (a) avec le coefficient d'agrandissement $|dw/dz|^2$.
46. Quel est le jacobien des transformations (a) $w = 2x^2 - iz + 3 - i$, (b) $u = x^2 - xy + y^2$, $v = x^2 + xy + y^2$.
 Rép. (a) $|4z - i|^2$, (b) $4(x^2 + y^2)$.
47. Montrer qu'un polygone du plan des z est transformé en un polygone semblable du plan des w par la transformation $w = F(z)$ si et seulement si $F'(z)$ est une constante non nulle.
48. La fonction analytique $F(z)$ représente l'intérieur $\mathcal{A}$ du cercle C défini par $|z| = 1$ sur une région $\mathcal{A}'$ limitée par une courbe fermée simple C' . Montrer que (a) la longueur de C' est $\oint_C |F'(z)| |dz|$, (b) l'aire de $\mathcal{A}'$ est $\iint_{\mathcal{R}} |F'(z)|^2 dx dy$.
49. Démontrer le résultat (2) page 200.
50. Trouver le rapport des aires des triangles du problème 36 (b) et comparer avec le rapport déduit du jacobien.

51. Soit $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ et $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$.

(a) Montrer que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$.

(b) Interpréter géométriquement le résultat de (a)

(c) Généraliser le résultat de (a).

52. Montrer que si $w = u + iv = F(z)$, $z = x + iy = G(\zeta)$ et $\zeta = \xi + i\eta$, le résultat du problème 51(a) est équivalent à

$$\left| \frac{dw}{d\zeta} \right| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|$$

TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES

53. Trouver une transformation homographique telle que les images des points i , $-i$, 1 soient respectivement 0 , 1 , ∞ . Rép. $w = (1 - i)(z - i)/2(z - 1)$

54. (a) Déterminer une transformation homographique telle que les images des sommets $1 + i$, $-i$, $-2 - i$ d'un triangle $\mathcal{T}$ du plan des z soient respectivement les points 0 , 1 , i du plan des w .

(b) Représenter l'image de l'intérieur du triangle $\mathcal{T}$ par la transformation obtenue en (a).

Rép. (a) $w = (2z - 2 - 2i)/\{(i - 1)z - 3 - 5i\}$

55. Démontrer que le produit (a) de deux transformations homographiques, (b) d'un nombre quelconque de transformations homographiques, est encore une transformation homographique

56. Si $a \neq b$ sont les deux points doubles d'une transformation homographique montrer que l'on peut mettre l'équation de celle-ci sous la forme

$$\frac{w - a}{w - b} = K \left(\frac{z - a}{z - b} \right)$$

où K est une constante.

57. Si $a = b$ dans le problème 56, montrer que la transformation considérée peut être représentée par

$$\frac{1}{w - a} = \frac{1}{z - a} + k$$

où k est une constante.

58. Montrer que la transformation homographique la plus générale mettant en correspondance $|z| = 1$ et $|w| = 1$, est

$$w = e^{i\theta} \left(\frac{z - p}{\bar{p}z - 1} \right)$$

où p désigne une constante.

59. Montrer que la transformation du problème 58 transforme $|z| < 1$ en (a) $|w| < 1$ si $|p| < 1$, (b) $|w| > 1$ si $|p| > 1$.

60. Que se passe-t-il si $|p| = 1$ dans le problème 58 ?

61. Résoudre directement le problème 11.

62. (a) Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre points cocycliques montrer que leur birapport est réel.

(b) La réciproque de (a) est-elle vraie ? Rép. (b) Oui.

LA TRANSFORMATION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

63. Déterminer à l'aide de la transformation de Schwarz-Christoffel une fonction réalisant la représentation conforme de chacune des régions indiquées du plan des w , sur la moitié supérieure du plan des z .

(a)

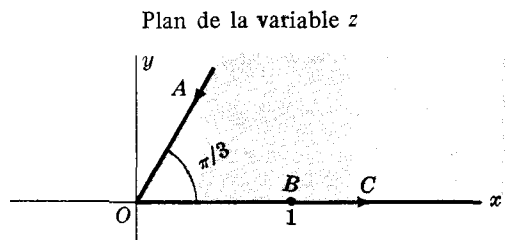


Fig. 8-91

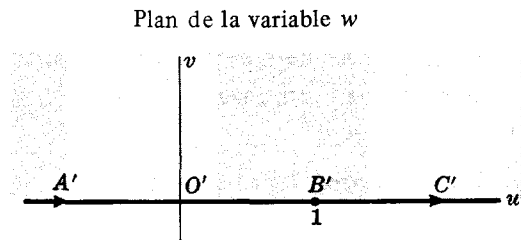


Fig. 8-92

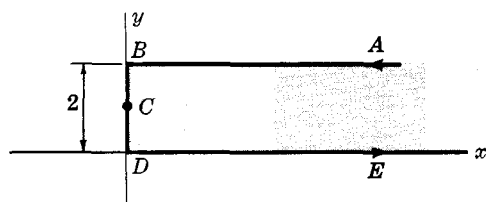
(b) Plan de la variable z


Fig. 8-93

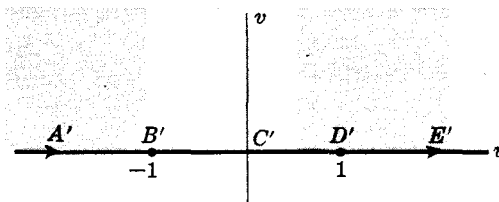
 Plan de la variable w


Fig. 8-94

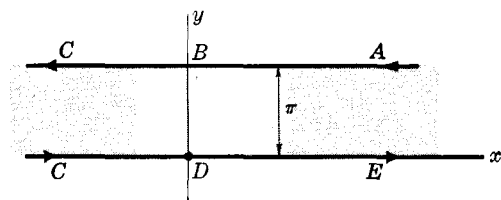
 (c) Plan de la variable z


Fig. 8-95

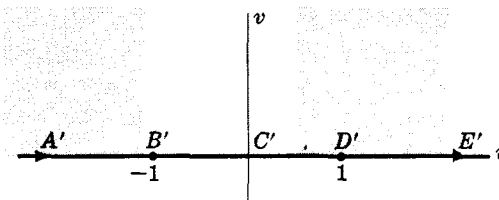
 Plan de la variable w


Fig. 8-96

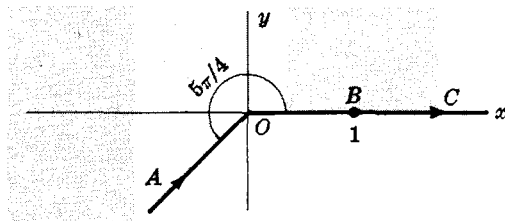
 (d) Plan de la variable z


Fig. 8-97

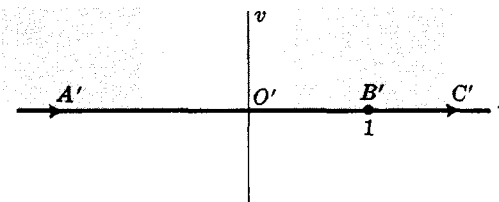
 Plan de la variable w


Fig. 8-98

Rép. (a) $w = z^3$, (b) $w = \operatorname{ch}(\pi z/2)$, (c) $w = e^z$, (d) $w = z^{4/5}$

64. Vérifier le résultat A-14 de la table 209, à l'aide de la transformation de Schwarz-Christoffel.

65. Trouver une fonction réalisant la représentation conforme du domaine infini ombré de la figure 8-99 sur la moitié supérieure du plan des z [Fig. 8-100] de telle façon que P, Q, R et P', Q', R' soient en correspondance [où P, R, P', R' sont à l'infini ainsi que les flèches l'indiquent]. Rép. $z = (w + \pi - \pi i)^2$

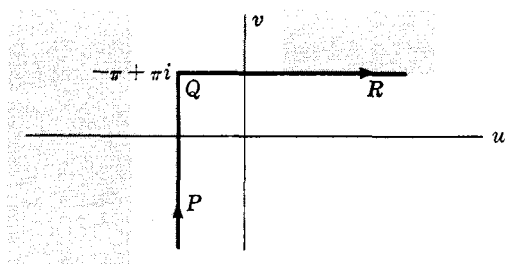
 Plan de la variable w


Fig. 8-99

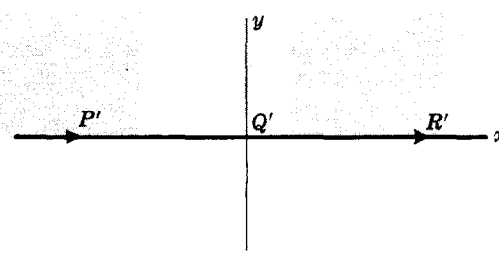
 Plan de la variable z


Fig. 8-100

66. Retrouver le résultat A-12 de la table 208 à l'aide de la transformation de Schwarz-Christoffel.

67. Déterminer une transformation conforme appliquant chacune des régions ombrées du plan des w représentées ci-dessous, sur la moitié supérieure du plan des z .

(a)

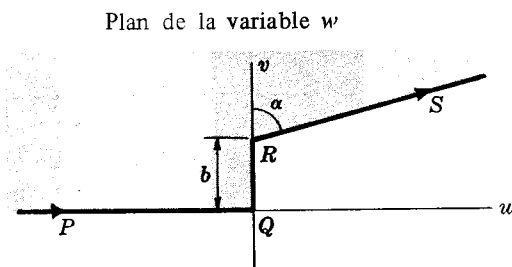


Fig. 8-101

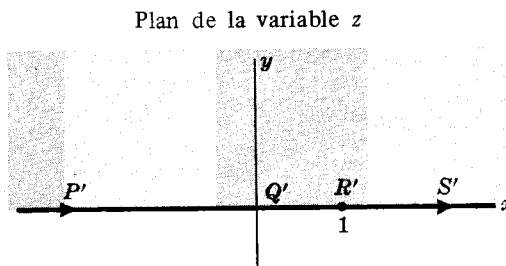


Fig. 8-102

(b)

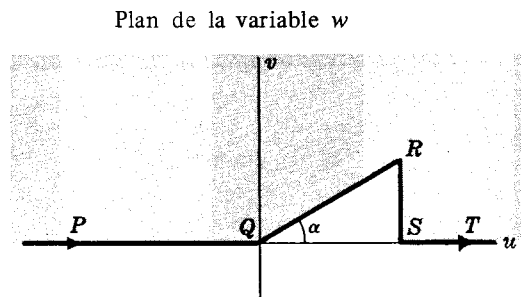


Fig. 8-103

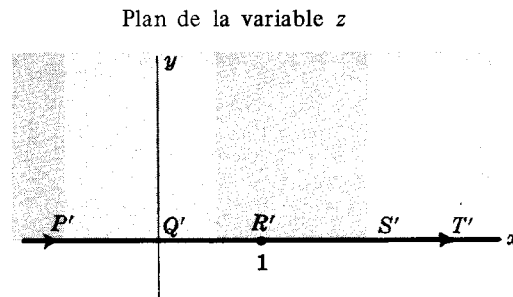


Fig. 8-104

68. (a) Retrouver le résultat A-11 de la table page 208 à l'aide d'une transformation de Schwarz-Christoffel.
 (b) A l'aide de (a) et du résultat A-12 page 205 retrouver le résultat C-5 page 211.

TRANSFORMATIONS DE FRONTIERES EXPRIMEES SOUS FORME PARAMETRIQUE.

69. (a) Trouver une transformation faisant correspondre une ligne droite à la parabole $y^2 = 4p(p - x)$.

(b) Quelle relation y a-t-il entre votre réponse et le résultat A-9 de la table page 208 ?

Rép. (a) Une transformation possible est $z = p - pw^2 + 2piw = p(1 + iw)^2$ déduite de la représentation paramétrique $x = p(1 - t^2)$, $y = 2pt$.

70. Trouver une transformation faisant correspondre une ligne droite à l'hyperbole $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$.

Rép. $z = a(\operatorname{ch} w + i \operatorname{sh} w)$

71. Trouver une transformation mettant en correspondance la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ et une ligne droite.

Rép. $z = a(w + i - ie^{-iw})$

72. (a) Trouver une transformation faisant correspondre une ligne droite à l'hypocycloïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(b) En quelle région l'intérieur de l'hypocycloïde est-il transformé ? Justifier votre réponse.

[On pourra utiliser la représentation paramétrique $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$]

Rép. (a) $z = a(\cos^3 w + i \sin^3 w)$

73. Deux représentations paramétriques possibles de la parabole $y = x^2$ sont (a) $x = t$, $y = t^2$ et (b) $x = \pm e^t$, $y = e^{2t}$. Utiliser ces équations pour obtenir deux transformations possibles faisant correspondre une ligne droite à la parabole considérée ; y a-t-il avantage à utiliser l'une de ces représentations plutôt que l'autre ?

PROBLEMES DIVERS

74. (a) Montrer que la transformation $w = 1/z$ fait correspondre une ligne droite au cercle $|z - a| = a$, ($a > 0$). Représenter graphiquement la région en laquelle l'intérieur du cercle est représentée ainsi que quelques points du cercle et leurs transformés.
- (b) Montrer comment on peut déduire de (a) une transformation appliquant le demi-plan supérieur sur le disque unité.

75. Montrer que la transformation $w = (z^2/a^2) - 1$ fait correspondre le cercle unité à une boucle de la lemniscate $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

76. Montrer que le cercle $|z - a| = a$, $a > 0$, est transformé en la cardioïde $\rho = 2a^2(1 + \cos \phi)$ par $w = z^2$ [voir le résultat C² page 210].

77. Montrer que l'on peut écrire la transformation de Joukowski $w = z + k^2/z$ sous la forme

$$\frac{w - 2k}{w + 2k} = \left(\frac{z - k}{z + k} \right)^2$$

78. (a) On considère une transformation homographique $w = F(z)$. Montrer que la transformation homographique la plus générale telle que $F\{F(z)\} = z$ est donnée par

$$\frac{w - p}{w - q} = k \frac{z - p}{z - q}$$

où $k^2 = 1$.

- (b) Quel est le résultat de (a) pour la condition $F\{F[F(z)]\} = z$?

- (c) Généraliser les résultats de (a) et (b).

Rép. (b) même résultat que (a) avec $k^3 = 1$.

79. (a) Déterminer une transformation faisant subir une rotation à l'ellipse $x^2 + xy + y^2 = 5$ de telle façon que le grand axe et le petit axe soient parallèles aux axes de coordonnées. (b) Quelles sont les longueurs du grand axe et du petit axe ?

80. Trouver une transformation homographique mettant en correspondance le cercle $|z - 1| = 2$ et la droite $x + y = 1$.

81. Vérifier les résultats (a) A-6, (b) A-7, (c) A-8, de la page 207.

82. On considère la projection stéréographique du plan complexe sur le sphère unité qui lui est tangente [voir page 6]. On considère un système de coordonnées rectangulaires XYZ tel que l'axe des Z coïncide avec NS cependant que l'axe des X et l'axe des Y coïncident avec l'axe des x et l'axe des y de la figure 1-6 page 6. Montrer que le point (X, Y, Z) de la sphère correspondant au point x, y du plan est tel que

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

83. Montrer que la projection stéréographique est une représentation conforme.

84. (a) Montrer que par projection stéréographique les longueurs d'arcs de courbes situés sur la sphère sont agrandies dans le rapport $(x^2 + y^2 + 1) : 1$.

- (b) Que se passe-t-il dans les régions situées au voisinage du pôle nord ? Quel en est l'effet sur les cartes géographiques ?

85. Soit $u = u(x, y), v = v(x, y)$, une transformation du plan des xy dans le plan des uv .

- (a) Montrer que pour que la transformation conserve les angles il est nécessaire et suffisant que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- (b) Déduire de (a) que l'une des deux conditions

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ou} \quad (ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

est alors remplie.

Conclure que $u + iv$ doit donc être une fonction analytique de $x + iy$.

86. Calculer l'aire de l'ellipse $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ où $a > 0$, $c > 0$ et $b^2 < 4ac$

Rép. $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$

87. Une transformation ponctuelle plane $w = f(z)$ est dite involutive si $z = f(w)$. Dans ce cas la simple répétition de la transformation ramène chaque point à sa position initiale. Trouver la condition que doivent remplir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que la transformation homographique $w = (az + \beta)/(\gamma z + \delta)$ soit involutive. Rép. $\delta = -\alpha$.
88. Montrer que les transformations (a) $w = (z + 1)/(z - 1)$, (b) $w = \text{Log coth } (z/2)$ sont involutives.
89. Déterminer une transformation homographique mettant en correspondance $|z| \leq 1$ et $|w - 1| \leq 1$ de telle façon que $1, -i$ correspondent respectivement à 2 et 0 .
90. Quelle est la signification de la nullité du jacobien d'une transformation homographique ?
91. Montrer que la transformation homographique $w = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ possède un point double si et seulement si $(\delta + \alpha)^2 = 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$.
92. (a) Montrer que la transformation $w = (\alpha z + \bar{\gamma})/(\gamma z + \bar{\alpha})$ où $|\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1$ laisse invariant le cercle unité et son intérieur.
(b) Montrer que si $|\gamma|^2 - |\alpha|^2 = 1$ l'intérieur du cercle est transformé en l'extérieur.
93. On suppose que par la transformation $w = F(z, \bar{z})$ le couple de courbes sécantes C_1 et C_2 du plan des z , est transformé en le couple de courbes sécantes C'_1, C'_2 du plan des w . Montrer que si la transformation est conforme alors (a) $F(z, \bar{z})$ est une fonction $f(z)$ de z seul, et (b) $f(z)$ est analytique.
94. (a) Démontrer la règle de multiplication des déterminants [voir problème 7] :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

(b) Montrer comment on peut étendre le résultat de (a) aux déterminants du troisième ordre et du quatrième ordre.

95. Déterminer une fonction mettant en correspondance conforme les régions ombrées des figures 8-105 et 8-106 où QS a pour longueur b .

Plan de la variable w

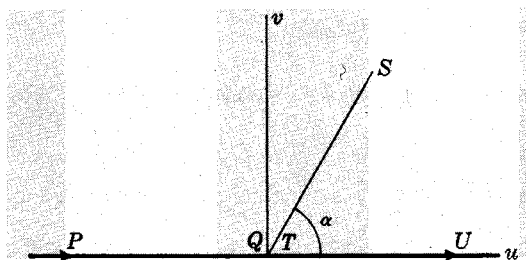


Fig. 8-105

Plan de la variable z

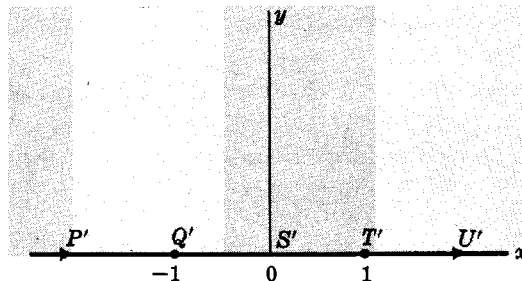


Fig. 8-106

96. (a) Montrer que la fonction $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^6)^{1/3}}$ réalise une correspondance conforme entre un hexagone régulier et le cercle unité.
- (b) Quelle est la longueur du côté de l'hexagone considéré en (a) ?

Rép. (b) $\frac{1}{6} \sqrt[3]{2} \Gamma(\frac{1}{3})$

97. Montrer que la transformation $w = (Az^2 + Bz + C)/(Dz^2 + Ez + F)$ peut être considérée comme le produit de trois transformations, l'une étant $\pi = \zeta^2$, intercalée entre deux transformations homographiques.
98. Trouver une fonction réalisant la représentation conforme d'un polygone régulier de n côtés sur le cercle unité.
99. Vérifier les résultats (a) A-9, Page 208 ; (b) A-10 ; Page 208 ; (c) B-3, Page 210 ; (d) B-4, Page 210 ; (e) C-3, Page 211 ; (f) C-4, Page 211.

100. On suppose que la fonction $w = f(z)$ possède un développement de Taylor de la forme

$$w = f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

Montrer que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et si $f^{(n)}(a) \neq 0$, la transformation représentée par $f(z)$ multiplie par n les angles de sommet a .

101. Déterminer une transformation conforme de la bande infinie $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ en l'intérieur du cercle unité $|w| \leq 1$ de telle façon qu'à $z = 0$ corresponde $w = 0$. *Rép.* $w = \operatorname{tg} z$.
102. Vérifier la valeur de K obtenue dans l'équation (2) du problème 25.
103. Trouver une représentation conforme du demi-plan supérieur sur l'intérieur d'un triangle de sommets $w = 0, 1, i$ images de $z = 0, 1, \infty$ respectivement.

$$\text{Rép. } w = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/4)} \int_0^z t^{-1/2} (1-t)^{-3/4} dt$$

Applications physiques de la représentation conforme

PROBLEMES AUX LIMITES

Beaucoup de problèmes de mécanique et de physique conduisent, quand ils sont formulés mathématiquement, à des équations aux dérivées partielles accompagnées de conditions appelées conditions aux limites. La recherche de solutions d'une équation aux dérivées partielles satisfaisant à des conditions aux limites est appelée problème aux limites.

Il est de première importance d'un point de vue mathématique aussi bien que d'un point de vue physique, d'être capable de trouver de telles solutions (i.e ces solutions *existent*) mais aussi pour un problème donné qu'il n'y ait qu'une solution (i.e la solution est *unique*).

FONCTIONS HARMONIQUES – FONCTIONS CONJUGUEES

Une fonction vérifiant l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

dans un domaine $\mathcal{R}$ est dite *harmonique* dans $\mathcal{R}$. Comme nous l'avons déjà vu, si $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ est analytique dans $\mathcal{R}$, alors u et v sont harmoniques dans $\mathcal{R}$.

Exemple : Si $f(z) = 4z^2 - 3iz = 4(x + iy)^2 - 3i(x + iy) = 4x^2 - 4y^2 + 3y + i(8xy - 3x)$, alors $u = 4x^2 - 4y^2 + 3y$, $v = 8xy - 3x$. Les fonctions u et v vérifiant l'équation de Laplace sont harmoniques.

Les fonctions u et v sont dites conjuguées ; la donnée d'une de ces deux fonctions permet de déterminer l'autre avec l'arbitraire d'une constante additive [voir chapitre 3].

PROBLEMES DE DIRICHLET ET NEUMANN

Soit $\mathcal{R}$ [Fig. 9-1] un ouvert simplement connexe limité par une courbe fermée simple C . Deux types de problèmes aux limites ont une grande importance.

1. **Problème de Dirichlet.** Il consiste en la recherche d'une fonction Φ vérifiant l'équation de Laplace (1) [i.e. Φ est harmonique] dans $\mathcal{R}$, et prenant des valeurs imposées sur la frontière C .
2. **Problème de Neumann.** Il consiste en la recherche d'une fonction Φ vérifiant l'équation de Laplace (1) dans $\mathcal{R}$ et dont la dérivée normale $\partial\Phi/\partial n$ prenne des valeurs données sur la frontière C .

Il se peut que $\mathcal{R}$ ne soit pas borné. Par exemple $\mathcal{R}$ peut être le demi-plan supérieur, la frontière C étant l'axe des x .

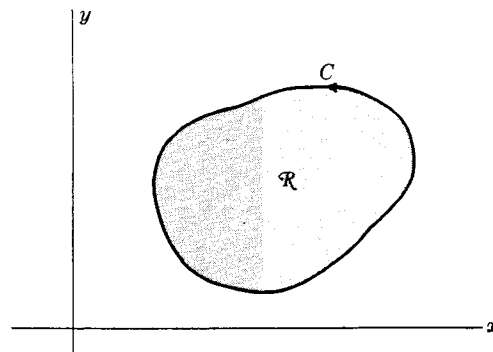


Fig. 9-1

On peut montrer que les solutions des problèmes de Dirichlet et de Neumann existent et sont uniques [avec toutefois une constante additive arbitraire dans le cas du problème de Neumann] moyennant des restrictions faibles sur les conditions aux limites [voir problèmes 29 et 80].

Il est intéressant de remarquer qu'un problème de Neumann peut se ramener à un problème de Dirichlet approprié (voir problème 79). Dans ces conditions si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet on peut (au moins théoriquement) résoudre le problème de Neumann correspondant.

LE PROBLEME DE DIRICHLET POUR LE CERCLE UNITE – FORMULE DE POISSON.

Soit C le cercle unité $|z| = 1$ et $\mathcal{R}$ son intérieur. Une fonction vérifiant l'équation de Laplace (i.e. une fonction harmonique) en tout point (r, θ) de $\mathcal{R}$, et prenant les valeurs données $F(\theta)$ sur C [i.e. $\Phi(1, \theta) = F(\theta)$], est donnée par

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) F(\phi) d\phi}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} \quad (2)$$

Cette formule est appelée formule de Poisson pour un cercle [voir chapitre 5, page 119].

LE PROBLEME DE DIRICHLET POUR UN DEMI-PLAN.

Une fonction harmonique dans le demi-plan $y > 0$ [$\text{Im}\{z\} > 0$] et prenant des valeurs données $G(x)$ sur l'axe de x [i.e. $\Phi(x, 0) = G(x)$, $-\infty < x < \infty$], est donnée par

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y G(\eta) d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} \quad (3)$$

Cette formule est parfois appelée formule de Poisson pour le demi-plan [voir chapitre 5, page 120].

SOLUTIONS DES PROBLEMES DE DIRICHLET ET DE NEUMANN PAR REPRESENTATION CONFORME.

Les problèmes de Dirichlet et de Neumann peuvent être résolus pour tout ouvert $\mathcal{R}$ simplement connexe qui peut être représenté conformément au moyen d'une fonction analytique sur l'intérieur du cercle unité ou sur le demi-plan. [D'après le théorème de Riemann sur la représentation conforme ceci peut toujours être réalisé au moins en théorie]. Les idées de base qui interviennent sont les suivantes.

- (a) On utilise une représentation conforme pour transformer le problème aux limites pour l'ouvert $\mathcal{R}$ en un problème concernant le cercle unité ou le demi-plan.
- (b) On résout le problème pour le cercle unité ou le demi-plan.
- (c) On utilise la solution de (b) pour résoudre le problème donné au moyen de la transformation inverse.

Les théorèmes importants utilisés sont les suivants.

Théorème 1. Soit $w = f(z)$ une fonction analytique dans l'ouvert connexe $\mathcal{R}$ du plan des z . Il existe alors une fonction inverse unique $z = g(w)$ dans $\mathcal{R}$, pourvu que $f'(z) \neq 0$ dans $\mathcal{R}$ [ce qui équivaut à l'affirmation que la représentation est conforme en tout point de $\mathcal{R}$].

Théorème 2. Soit $\Phi(x, y)$ harmonique dans $\mathcal{R}$, on suppose que $\mathcal{R}$ est transformé en $\mathcal{R}'$ du plan des w par $w = f(z)$ où $f(z)$ est analytique et $f'(z) \neq 0$. On a $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, et donc $\Phi(x, y) = \Phi[x(u, v), y(u, v)] \equiv \Psi(u, v)$ est harmonique dans $\mathcal{R}'$. En d'autres termes une fonction harmonique est transformée en fonction harmonique par la transformation $w = f(z)$ où $f(z)$ est analytique [voir problème 4].

Théorème 3. Si $\Phi = a$ [une constante] sur la frontière ou sur une portion de la frontière C d'un ouvert connexe du plan des z , alors $\psi = a$ sur son image C' dans le plan des w . De même si la dérivée normale de Φ est nulle, i.e. $\partial\Phi/\partial n = 0$ sur C il en est de même pour la dérivée normale de ψ sur C' .

APPLICATIONS A L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES

NOTIONS FONDAMENTALES

La solution de nombreux problèmes importants de dynamique des fluides, hydrodynamique ou aérodynamique, est souvent donnée par des méthodes utilisant la variable complexe dans les conditions suivantes.

1. **L'écoulement fluide est à deux dimensions**, i.e. les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. Ceci permet de ne considérer qu'un plan que nous prendrons pour plan des z . Les figures construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré. Par exemple dans la figure 9.7, page 237 le cercle représente un obstacle cylindrique infini autour duquel s'écoule le fluide. Naturellement un cylindre infini n'est que le modèle mathématique d'un cylindre physique suffisamment long pour que l'on puisse négliger l'influence des extrémités.
2. **L'écoulement est stationnaire ou permanent**, i.e. la vitesse du fluide en tout point (x, y) ne dépend que de la position du point considéré et non du temps.
3. **Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel**, i.e. si V_x et V_y désignent les composantes de la vitesse du fluide en (x, y) selon les axes des x et y , il existe une fonction Φ appelée potentiel des vitesses telle que

$$V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (4)$$

De façon équivalente si C est une courbe fermée simple quelconque du plan de la variable z et si V_t désigne la composante tangentielle de la vitesse sur C ,

$$\oint_C V_t ds = \oint_C V_x dx + V_y dy = 0 \quad (5)$$

Voir problème 48.

L'une ou l'autre des intégrales (5) est appelée la circulation du fluide le long de C . Quand la circulation est nulle sur toute courbe C , le fluide est dit irrotationnel.

4. **Le fluide est incompressible**, i.e. la densité ou masse par unité de volume est constante. Si V_n désigne la composante normale du vecteur vitesse sur C cette condition s'écrit sous la forme (voir problème 48).

$$\oint_C V_n ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0 \quad (6)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

qui exprime que la quantité de fluide contenue dans C est constante, i.e. la quantité de fluide entrant dans C est égale à la quantité de fluide qui en sort. Pour cette raison l'équation (6) ou (7) est appelée équation de continuité.

5. **Le fluide est non visqueux**, i.e. ne possède pas de viscosité ou frictions internes. Un fluide visqueux a tendance à adhérer à la surface d'un obstacle placé sur son passage. S'il n'y a pas de viscosité les forces de pression sur la surface lui sont perpendiculaires. Un fluide non visqueux et incompressible est souvent appelé fluide parfait. On doit naturellement se rendre compte qu'un tel fluide n'est qu'un modèle mathématique de fluide réel pour lequel on néglige les phénomènes de viscosité.

LE POTENTIEL COMPLEXE

On voit d'après (4) et (7) que le potentiel des vitesses est harmonique, i.e. vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y)$ telle que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (9)$$

soit analytique. On a d'après (4), par dérivation

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_x - iV_y \quad (10)$$

La vitesse [appelée quelquefois vitesse complexe] est donc donnée par

$$\mathcal{V} = V_x + iV_y = \overline{d\Omega/dz} = \overline{\Omega'(z)} \quad (11)$$

et a pour module

$$V = |\mathcal{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)| \quad (12)$$

Les points pour lesquels la vitesse est nulle, i.e. $\Omega'(z) = 0$, sont appelés points d'arrêt.

La fonction $\Omega(z)$ dont l'importance est fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

LIGNES EQUIPOTENTIELLES ET LIGNES DE COURANT

Les familles de courbes à un paramètre

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta \quad (13)$$

où α et β désignent des constantes, sont des familles orthogonales et sont appelées respectivement les lignes équipotentielles et les lignes de courant [bien que les expressions plus appropriées courbes équipotentielles ou courbes de courant soient quelquefois utilisées]. Dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide.

La fonction ψ est appelée la fonction de courant cependant que comme déjà vu, la fonction Φ est appelée le potentiel des vitesses.

SOURCES ET PUIITS

Dans les considérations théoriques précédentes nous avons supposé qu'il n'existe pas de point du plan des z [i.e. de droites dans le fluide] en lequel le fluide apparaît ou disparaît. De tels points sont respectivement appelés sources et puits. En de tels points, qui sont des points singuliers, les équations de continuité (7) et (8) ne sont plus valables. En particulier l'intégrale (5) exprimant la circulation peut ne pas être nulle le long de courbes fermées C entourant de tels points.

L'utilisation de la théorie précédente ne présente pas de difficultés pourvu que l'on introduise des singularités appropriées dans le potentiel complexe $\Omega(z)$ et que l'on remarque que les équations telles que (7) et (8) sont alors valables dans tout domaine ne contenant pas de point singulier.

QUELQUES ECOULEMENTS PARTICULIERS

Théoriquement tout potentiel $\Omega(z)$ peut être associé à un écoulement plan particulier. Les exemples qui suivent sont des cas simples qui se présentent dans la pratique. [On remarquera que l'on peut ajouter une constante à tous les potentiels considérés sans affecter la forme de l'écoulement].

1. **Écoulement uniforme.** Le potentiel complexe correspondant à l'écoulement d'un fluide à vitesse constante V_0 , dans une direction faisant un angle δ avec la direction positive de l'axe des x , est (figure 9-2 ci-dessous)

$$\Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z \quad (14)$$

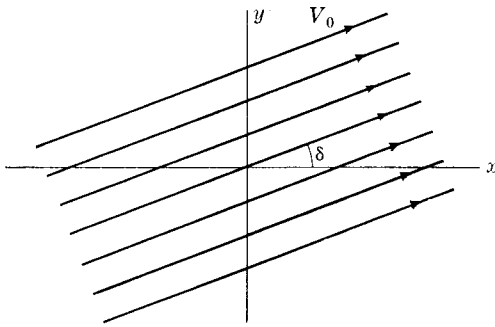


Fig. 9-2

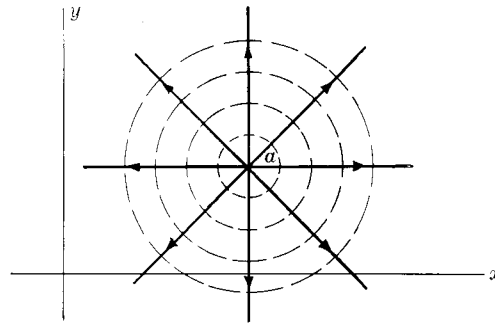


Fig. 9-3

2. **Source en $z = a$.** Si un fluide sort à vitesse constante d'une source en $z = a$ (figure 9-3 ci-dessous), le potentiel complexe est

$$\Omega(z) = k \operatorname{Log}(z - a) \quad (15)$$

où $k > 0$ est appelé la force de la source. Les lignes de courant ont été représentées en traits pleins et les équipotentiels en pointillés.

3. **Puits en $z = a$.** Dans ce cas le fluide disparaît en $z = a$ (figure 9-4 ci-dessous) et le potentiel complexe se déduit de celui d'une source en remplaçant k par $-k$, ce qui donne

$$\Omega(z) = -k \operatorname{Log}(z - a) \quad (16)$$

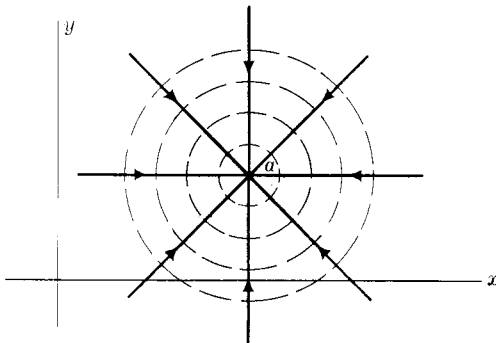


Fig. 9-4

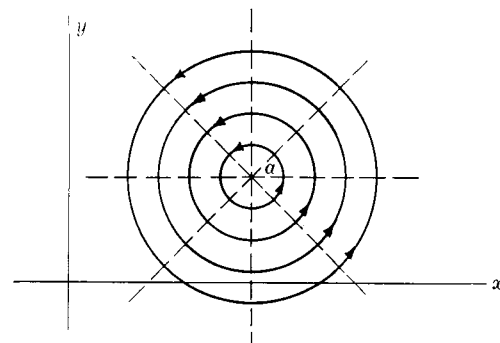


Fig. 9-5

4. **Tourbillon.** L'écoulement correspondant au potentiel complexe

$$\Omega(z) = -ik \operatorname{Log}(z - a) \quad (17)$$

est représenté dans la figure 9-5 ci-dessus. La vitesse du fluide est dans ce cas inversement proportionnelle à la distance du point considéré à a .

Le point $z = a$ est appelé un tourbillon et k est sa force. La circulation [voir équation (5)] le long d'une courbe fermée simple C entourant $z = a$ est égale à $2k\pi$ en module. On remarque que si l'on change k en $-k$ on obtient le potentiel complexe correspondant à un tourbillon rétrograde.

5. **Superpositions d'écoulements.** On peut par addition de potentiels complexes décrire des écoulements plus compliqués. Un exemple important résulte de la considération de l'écoulement dû à une source en $z = -a$ et un puits de même force en $z = a$. Le potentiel complexe est alors

$$\Omega(z) = k \operatorname{Log}(z+a) - k \operatorname{Log}(z-a) = k \operatorname{Log} \left(\frac{z+a}{z-a} \right) \quad (18)$$

Quand $a \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$ de telle façon que $2ka = \mu$ soit fini, on obtient le potentiel complexe

$$\Omega(z) = \frac{\mu}{z} \quad (19)$$

C'est le potentiel complexe dû à un doublet ou dipôle, i.e. la combinaison d'une source et d'un puits de même force séparés par une très petite distance. Le quantité μ est appelée le moment du dipôle.

ÉCOULEMENTS AVEC OBSTACLES

Un important problème dans la théorie de l'écoulement des fluides consiste en la détermination de la forme de l'écoulement d'un fluide se déplaçant initialement à vitesse constante V_0 et dans lequel on a placé un obstacle.

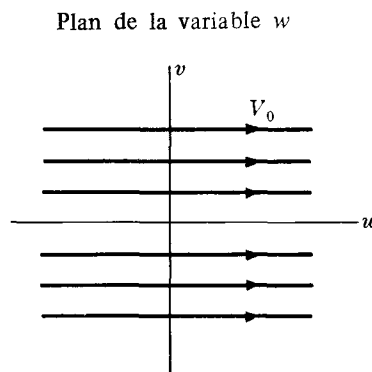


Fig. 9-6

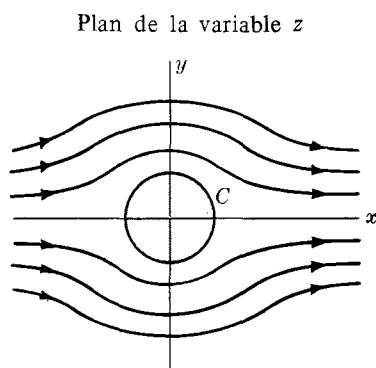


Fig. 9-7

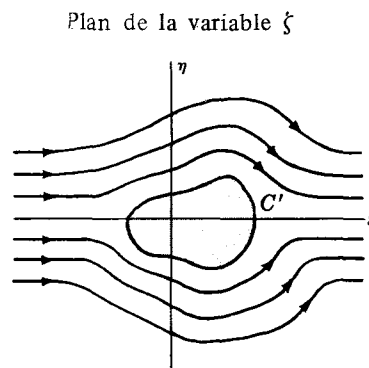


Fig. 9-8

On cherche en général dans ce type de problème un potentiel complexe de la forme

$$\Omega(z) = V_0 z + G(z) \quad (20)$$

(si l'écoulement a lieu dans le plan des z) où $G(z)$ est tel que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = 0$, ce qui signifie physiquement que suffisamment loin de l'obstacle la vitesse est constante (dans ce cas V_0). De plus le potentiel complexe devra être choisi de telle façon qu'une ligne de courant représente la frontière de l'obstacle.

Une connaissance de transformations conformes est souvent utile pour obtenir des potentiels complexes. Par exemple le potentiel complexe correspondant à un écoulement uniforme dans le plan des w de la figure 9-6 est donné par $V_0 w$. Par la transformation $w = z + a^2/z$ [voir A-4 page 206] la moitié supérieure du plan des w de la figure 9-6 est transformée en la région de la moitié supérieure du plan des z extérieure au cercle C , et le potentiel complexe pour l'écoulement de la figure 9-7 est

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (21)$$

De même si $z = F(\zeta)$ applique C et son extérieur sur C' et son extérieur [voir Fig. 9-8], alors le potentiel complexe pour l'écoulement de la figure 9-8 est obtenu en remplaçant z par $F(\zeta)$ dans (21). Le potentiel complexe peut également être obtenu par passage direct du plan des w au plan des ζ au moyen d'une transformation conforme convenable.

A l'aide des considérations précédentes et en introduisant d'autres phénomènes physiques tels que des tourbillons on est en mesure de décrire l'écoulement d'un fluide le long de profils divers et ainsi de décrire le mouvement d'un avion en vol.

THEOREME DE BERNOULLI

Si P désigne la pression et V la vitesse d'un fluide le théorème de Bernoulli établit que

$$P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K \quad (22)$$

où σ désigne la densité du fluide et K une constante le long de toute ligne de courant.

THEOREME DE BLASIUS

1. Si X et Y sont les composantes des forces rapportées aux axes Ox , Oy , dues à la pression d'un fluide sur la surface d'un obstacle limité par une courbe fermée simple C , alors si Ω est le potentiel complexe de l'écoulement

$$X - iY = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \quad (23)$$

2. Si M est le moment à l'origine des forces de pression sur l'obstacle,

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \right\} \quad (24)$$

ou "Re" désigne comme d'habitude "la partie réelle de".

APPLICATIONS A L'ELECTROSTATIQUE

LOI DE COULOMB.

Soit r la distance séparant deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 . Ces deux charges exercent l'une sur l'autre une force dont la grandeur donnée par la loi de Coulomb est

$$F = \frac{q_1 q_2}{\kappa r^2} \quad (25)$$

cette force est attractive ou répulsive selon que les charges sont de même signe (toutes les deux positives ou toutes les deux négatives) ou de signes contraires. La constante κ de (25), qui est appelée constante diélectrique, dépend du milieu ; dans le vide $\kappa = 1$, dans les autres cas $\kappa > 1$. Dans tout ce qui suit nous supposons $\kappa = 1$ sauf indication contraire.

CHAMP ELECTRIQUE. POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

Considérons une distribution de charges, continue ou discrète. Cette distribution crée un champ électrique. Si l'on place une charge positive unité (suffisamment petite pour ne pas modifier le champ de façon appréciable) en un point A où il n'y a pas initialement de charge, la force agissant sur cette charge est appelée le champ électrique en A et est noté ϵ . Cette force dérive d'un potentiel Φ appelé quelquefois le potentiel électrostatique. Ceci se note

$$\epsilon = -\operatorname{grad} \Phi = -\nabla \Phi \quad (26)$$

Si la distribution de charge est plane ce qui nous intéressera principalement ici, alors

$$\mathcal{E} = E_x + iE_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{où} \quad E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (27)$$

Dans un tel cas si E_t désigne la composante tangentielle du champ électrique le long d'une courbe fermée simple C du plan des z

$$\oint_C E_t ds = \oint_C E_x dx + E_y dy = 0 \quad (28)$$

THEOREME DE GAUSS

Nous nous limiterons à des distributions de charges pouvant être considérées comme planes. Si C est une courbe fermée simple du plan des z entourant un ensemble de charges q (dans le cas présent un cylindre entourant un ensemble de charges q) et si E_n est la composante normale du champ électrique alors le théorème de Gauss établit que

$$\oint_C E_n ds = 4\pi q \quad (29)$$

Si C ne contient pas de charges ceci se réduit à

$$\oint_C E_n ds = \oint_C E_x dy - E_y dx = 0 \quad (30)$$

On en déduit que dans toute région ne contenant pas de charge

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

De (27) et (31) on tire

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (32)$$

i.e. Φ est harmonique en tout point où il n'y a pas de charge.

LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE COMPLEXE

D'après ce qui précède il est évident qu'il doit exister une fonction harmonique Ψ conjuguée de Φ telle que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (33)$$

soit analytique dans toute région ne contenant pas de charge. Dans ces conditions (27) devient

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\frac{d\Omega}{dz} = -\overline{\Omega'(z)} \quad (34)$$

et le module de $\mathcal{E}$ est $E = |\mathcal{E}| = |-\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)|$.

Les courbes (les surfaces cylindriques)

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta \quad (35)$$

sont respectivement les courbes équipotentielles et les lignes de forces.

LIGNES DE CHARGES

L'analogie entre ce qui précède et l'écoulement des fluides est évidente. Le champ électrique dans les problèmes électrostatiques correspond au champ des vitesses dans les problèmes d'écoulement fluide, la seule différence consistant en un changement de signe dans les potentiels complexes correspondants.

A la notion de source et de puits correspond une notion analogue en électrostatique. Le potentiel électrostatique complexe dû à une ligne de charges q par unité de longueur en z_0 (dans le vide) est donné par

$$\Omega(z) = -2q \operatorname{Log}(z - z_0) \quad (36)$$

et représente une source ou un puits selon que $q < 0$ et $q > 0$. De même on parlera de doublets ou dipôles, etc. Si le milieu considéré n'est pas le vide, on remplacera q par q/κ dans (36).

CONDUCTEURS.

Si un solide est parfaitement conducteur toute charge est superficielle. Donc si l'on considère la surface représentée par une courbe fermée simple C du plan des z , les charges sont en équilibre sur C et C est donc une équipotentielle.

Le problème du calcul du potentiel dû à un ensemble de conducteurs cylindriques est important. On peut le résoudre par l'emploi de transformations conformes.

CAPACITE

Soit V la différence de potentiel existant entre deux conducteurs possédant des charges de même grandeur q mais de signes opposés, la quantité C définie par

$$q = CV \quad (37)$$

dépend seulement de la géométrie des conducteurs et est appelée la capacité. L'ensemble des conducteurs considérés forme ce que l'on appelle un condensateur.

APPLICATIONS A LA DIFFUSION DE LA CHALEUR

FLUX DE CHALEUR

Considérons un solide possédant une distribution de température variable avec le temps. On est souvent amené à considérer la quantité de chaleur conduite par unité d'aire et par unité de temps, à travers une surface située dans le solide. Cette quantité appelée quelquefois flux de chaleur à travers la surface considérée, est donnée par

$$\mathcal{Q} = -K \operatorname{grad} \Phi \quad (38)$$

où Φ désigne la température et K supposé constant, est la conductibilité thermique qui dépend de la nature du solide.

LA TEMPERATURE COMPLEXE

Si l'on se limite aux problèmes plans

$$\mathcal{Q} = -K \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = Q_x + i Q_y \quad \text{où} \quad Q_x = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q_y = -K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (39)$$

Soit C une courbe fermée simple quelconque du plan des z (représentant la section droite d'un cylindre) ; si Q_t et Q_n sont les composantes tangentielles et normales du flux de chaleur et s'il n'y a pas d'accumulation de chaleur dans C alors on a

$$\oint_C Q_n ds = \oint_C Q_x dy - Q_y dx = 0, \quad \oint_C Q_t ds = \oint_C Q_x dx + Q_y dy = 0 \quad (40)$$

ceci suppose qu'il n'y a ni source ni puits dans C . On tire de l'équation (40)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (41)$$

ce qui à l'aide de (39),

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

i.e. Φ est harmonique. En introduisant la fonction harmonique conjuguée, on voit que

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (42)$$

est analytique. Les familles de courbes

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta \quad (43)$$

sont respectivement les lignes isothermes et les lignes de flux, cependant que $\Omega(z)$ est la température complexe.

Les analogies avec les problèmes d'écoulement fluide et d'électrostatique sont évidentes et les méthodes utilisées pour résoudre ceux-ci peuvent être également utilisées dans la résolution de problèmes de chaleur.

Problèmes résolus

FONCTIONS HARMONIQUES

1. Montrer que les fonctions (a) $x^2 - y^2 + 2y$ et (b) $\sin x \operatorname{ch} y$ sont harmoniques dans tout domaine fini $\mathcal{R}$ du plan des z .

(a) Si $\Phi = x^2 - y^2 + 2y$, alors $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$; Φ est harmonique dans $\mathcal{R}$.

(b) Si $\Phi = \sin x \operatorname{ch} y$, alors $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\sin x \operatorname{ch} y$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sin x \operatorname{ch} y$, d'où $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ et Φ est donc harmonique dans $\mathcal{R}$.

2. Montrer que les fonctions du problème 1 sont harmoniques dans le plan des w , w étant lié à z par la transformation $z = w^3$.

Si $z = w^3$, alors $x + iy = (u + iv)^3 = u^3 - 3uv^2 + i(3u^2v - v^3)$ et $x = u^3 - 3uv^2$, $y = 3u^2v - v^3$.

(a) $\Phi = x^2 - y^2 + 2y = (u^3 - 3uv^2)^2 - (3u^2v - v^3)^2 + 2(3u^2v - v^3)$
 $= u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6 + 6u^2v - 2v^3$

d'où $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 30u^4 - 180u^2v^2 + 30v^4 + 12v$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = -30u^4 + 180u^2v^2 - 30v^4 - 12v$

et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0$ comme il était demandé.

(b) On doit montrer que $\Phi = \sin(u^3 - 3uv^2) \operatorname{ch}(3u^2v - v^3)$ vérifie $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0$. Ceci peut être éta-

bli directement par différentiation, dans ce cas particulier les calculs sont fastidieux et sont une illustration d'un résultat général démontré au problème 4.

3. Montrer que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)$ où $w = f(z)$ est analytique et $f'(z) \neq 0$.

La fonction $\Phi(x, y)$ est transformée par f en $\Phi[x(u, v), y(u, v)]$. On a par dérivation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

On en déduit par addition,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Les fonctions u et v étant harmoniques, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. De plus d'après les équations

de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = |f'(z)|^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Dans ces conditions (1) devient

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right)$$

4. Montrer qu'une fonction harmonique demeure harmonique après la transformation $w = f(z)$ où $f(z)$ est analytique et $f'(z) \neq 0$.

C'est une conséquence du problème 3, car si $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ et $f'(z) \neq 0$, alors $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0$.

5. Si a est réel montrer que la partie imaginaire et la partie réelle de $w = \text{Log}(z - a)$ sont des fonctions harmoniques dans tout domaine α ne contenant pas $z = a$.

Méthode 1.

Si α ne contient pas a , alors $w = \text{Log}(z - a)$ est analytique dans α , la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction considérée sont donc harmoniques dans α .

Méthode 2.

On pose $z - a = re^{i\theta}$. Si l'on utilise la détermination principale de θ , $w = u + iv = \text{Log}(z - a) = \text{Log } r + i\theta$ et donc $u = \text{Log } r$, $v = \theta$.

En coordonnées polaires l'équation de Laplace s'écrit $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$ et l'on trouve par substitution directe que $u = \text{Log } r$ et $v = \theta$ en sont solutions pourvu que $\mathcal{R}$ ne contienne pas $r = 0$, i.e. $z = a$.

Méthode 3.

Si $z - a = re^{i\theta}$, alors $x - a = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $r = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$, $\theta = \text{arctg} \{y/(x - a)\}$. On a donc $w = u + iv = \frac{1}{2} \text{Log}\{(x - a)^2 + y^2\} + i \text{arctg} \{y/(x - a)\}$ et $u = \frac{1}{2} \text{Log}\{(x - a)^2 + y^2\}$, $v = \text{arctg} \{y/(x - a)\}$. Par substitution dans l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, on trouve après dérivation que u et v sont solutions si $z \neq a$.

PROBLEMES DE DIRICHLET ET NEUMANN

6. Déterminer une fonction harmonique dans la moitié supérieure du plan des z , $\text{Im}\{z\} > 0$, prenant sur l'axe des x les valeurs déterminées par $G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

On doit résoudre pour $\Phi(x, y)$ le problème aux limites

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0; \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \Phi(x, y) = G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

C'est un problème de Dirichlet pour le demi-plan [voir Fig. 9-9].

La fonction $A\theta + B$ où A et B sont réels et constants, est harmonique car c'est la partie imaginaire de $A \text{Log } z + B$.

Pour déterminer A et B remarquons que les conditions limites sont $\Phi = 1$ pour $x > 0$, i.e. $\theta = 0$ et $\Phi = 0$ pour $x < 0$, i.e. $\theta = \pi$. On a donc

$$(1) \quad 1 = A(0) + B, \quad (2) \quad 0 = A(\pi) + B$$

d'où $A = -1/\pi$, $B = 1$.

Le résultat cherché est donc

$$\Phi = A\theta + B = 1 - \frac{\theta}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

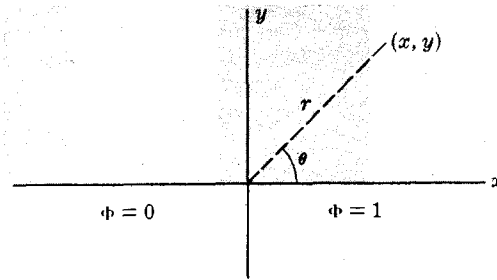


Fig. 9-9

Autre méthode. La formule de Poisson pour le demi-plan donne :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y G(\eta) d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{y[0] d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y[1] d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{\eta - x}{y} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) = 1 - \frac{1}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

7. Résoudre le problème aux limites suivant

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0;$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \Phi(x, y) = G(x) = \begin{cases} T_0 & x < -1 \\ T_1 & -1 < x < 1 \\ T_2 & x > 1 \end{cases}$$

où T_0, T_1, T_2 sont des constantes

C'est un problème de Dirichlet pour le demi-plan supérieur [voir Fig. 9-10].

La fonction $A\theta_1 + B\theta_2 + C$ où A, B, C sont des constantes réelles, est harmonique car elle est la partie imaginaire de $A \text{Log}(z + 1) + B \text{Log}(z - 1) + C$.

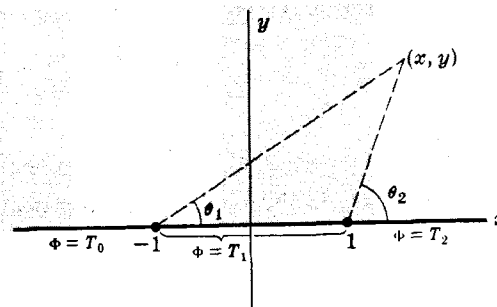


Fig. 9-10

Pour déterminer A, B, C on remarque que les conditions limites sont $\Phi = T_2$ pour $x > 1$, i.e. $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\Phi = T_1$ pour $-1 < x < 1$, i.e. $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$; $\Phi = T_0$ pour $x < -1$, i.e. $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$. On a donc

$$(1) \quad T_2 = A(0) + B(0) + C \quad (2) \quad T_1 = A(0) + B(\pi) + C \quad (3) \quad T_0 = A(\pi) + B(\pi) + C$$

d'où $C = T_2$, $B = (T_1 - T_2)/\pi$, $A = (T_0 - T_1)/\pi$.

La solution cherchée est donc

$$\Phi = A\theta_1 + B\theta_2 + C = \frac{T_0 - T_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+1} \right) + \frac{T_1 - T_2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-1} \right) + T_2$$

Autre méthode. La formule de Poisson pour le demi-plan donne

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y G(\eta) d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{y T_0 d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y T_1 d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{y T_2 d\eta}{y^2 + (x-\eta)^2} \\ &= \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta-x}{y} \right) \Big|_{-\infty}^{-1} + \frac{T_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta-x}{y} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{T_2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta-x}{y} \right) \Big|_1^{\infty} \\ &= \frac{T_0 - T_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+1} \right) + \frac{T_1 - T_2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-1} \right) + T_2 \end{aligned}$$

8. Déterminer une fonction harmonique dans le cercle unité $|z| = 1$ et prenant sur le cercle unité les valeurs données par $F(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$

C'est un problème de Dirichlet pour le cercle unité [Fig. 9-11]; on cherche une fonction vérifiant l'équation de Laplace dans le cercle $|z| = 1$ et prenant les valeurs 0 sur l'arc ABC , 1 sur l'arc CDE .

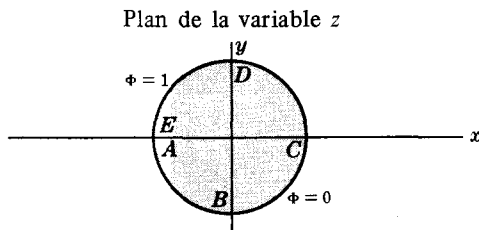


Fig. 9-11

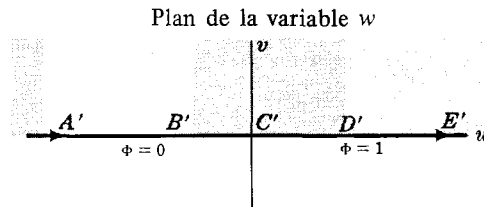


Fig. 9-12

Méthode 1, à l'aide d'une représentation conforme.

Représentons l'intérieur du cercle $|z| = 1$ sur le demi-plan supérieur [Fig. 9-12] $\operatorname{Im}\{w\} > 0$, à l'aide de la transformation conforme $z = \frac{i-w}{i+w}$ ou $w = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$ [voir problème 12, chapitre 8, page 127 et changer les rôles de z et w].

Par cette transformation, aux arcs ABC et CDE correspondent respectivement $A'B'C'$ et $C'D'E'$ sur l'axe réel du plan des w . Dans ces conditions d'après le problème 81 les conditions limites $\Phi = 0$ sur l'arc ABC et $\Phi = 1$ sur l'arc CDE , deviennent respectivement $\Phi = 0$ sur $A'B'C'$ et $\Phi = 1$ sur $C'D'E'$.

On est donc ramené au problème de la recherche d'une fonction Φ harmonique dans la moitié supérieure du plan des w et prenant les valeurs 0 pour $u < 0$ et 1 pour $u > 0$. Ce problème a été résolu dans le problème 6 et la solution (on remplace x par u et y par v) est

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u} \right) \quad (1)$$

Dans ces conditions de $w = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$, on tire $u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2}$, $v = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2 + y^2}$. ce qui par substitution dans (1) donne le résultat cherché

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{1-(x^2+y^2)} \right) \quad (2)$$

ou en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$\Phi = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r \sin \theta}{1-r^2} \right) \quad (3)$$

Méthode 2, à l'aide de la formule de Poisson

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\phi) d\phi}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right)\end{aligned}$$

par intégration directe [voir problème 69 (b), chapitre 5, page 136]

APPLICATIONS A L'ECOULEMENT DES FLUIDES

9. (a) Déterminer le potentiel complexe pour un fluide se déplaçant à vitesse constante V_0 dans une direction faisant l'angle δ avec la direction de l'axe des x [voir figure 9-13].
- (b) Déterminer le potentiel des vitesses et la fonction de courant.
- (c) Déterminer les équations des lignes de courant et des équipotentielles.
- (a) Les composantes de la vitesse sont

$$V_x = V_0 \cos \delta, \quad V_y = V_0 \sin \delta$$

La vitesse complexe est

$$\mathcal{V} = V_x + iV_y = V_0 \cos \delta + iV_0 \sin \delta = V_0 e^{i\delta}$$

Le potentiel complexe est donné par

$$\frac{d\Omega}{dz} = \overline{\mathcal{V}} = V_0 e^{-i\delta}$$

D'où par intégration

$$\Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z$$

sans tenir compte de la constante d'intégration.

- (b) Le potentiel complexe et la fonction de courant sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du potentiel complexe. On a donc

$$\Omega(z) = \Phi - i\Psi = V_0 e^{-i\delta} z = V_0 (x \cos \delta + y \sin \delta) + iV_0 (y \cos \delta - x \sin \delta)$$

et

$$\Phi = V_0 (x \cos \delta + y \sin \delta), \quad \Psi = V_0 (y \cos \delta - x \sin \delta)$$

Autre méthode.

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_x = V_0 \cos \delta \quad (2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_y = V_0 \sin \delta$$

De (1) on tire la valeur de Φ , $\Phi = (V_0 \cos \delta)x + G(y)$. Par substitution dans (2), $G'(y) = V_0 \sin \delta$ et $G(y) = (V_0 \sin \delta)y$ en omettant la constante d'intégration. On a donc

$$\Phi = (V_0 \cos \delta)x + (V_0 \sin \delta)y$$

D'après des équations de Cauchy-Riemann

$$(3) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_x = V_0 \cos \delta \quad (4) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -V_y = -V_0 \sin \delta$$

De (3) on tire $\Psi = (V_0 \cos \delta)y + H(x)$ et par substitution dans (4), $H'(x) = -V_0 \sin \delta$ et $H(x) = -(V_0 \sin \delta)x$ en omettant la constante d'intégration. On a donc

$$\Psi = (V_0 \cos \delta)y - (V_0 \sin \delta)x$$

- (c) Les lignes de courant sont données par $\Psi = V_0 (y \cos \delta - x \sin \delta) = \beta$ pour les différentes valeurs de β . Physiquement les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide, dans ce cas particulier ce sont des lignes droites.

Les équipotentielles sont données par $\Phi = V_0 (x \cos \delta + y \sin \delta) = \alpha$ pour diverses valeurs de α . Géométriquement ce sont des droites perpendiculaires aux lignes de courant ; tous les points d'une équipotentielle sont au même potentiel.

Plan de la variable z

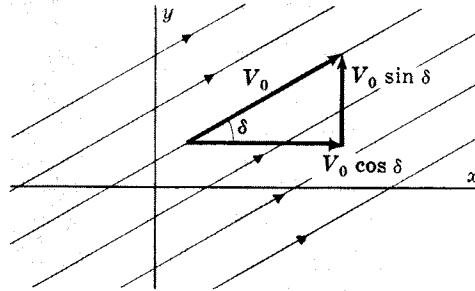


Fig. 9-13

10. Le potentiel complexe d'un écoulement fluide est donné par $\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$ où V_0 et a sont des constantes positives. (a) Déterminer les équations des lignes de courant et des lignes équipotentielles, représenter graphiquement ces courbes et interpréter physiquement. (b) Montrer que l'on peut interpréter l'écoulement comme étant celui qui se produit autour d'un obstacle circulaire de rayon a . (c) Calculer la vitesse en tout point, préciser sa valeur en des points éloignés de l'obstacle. (d) Quels sont les points stationnaires ?

(a) Posons $z = re^{i\theta}$. On a donc

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 \left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \Psi = V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

Les lignes de courant sont données par $\Psi = \text{constante} = \beta$, i.e.

$$V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = \beta$$

Ces courbes ont été représentées en traits pleins à la figure 9-14 et représentent les trajectoires des particules du fluide. On remarque que $\Psi = 0$ correspond à $r = a$ et $\theta = 0$ ou π .

Les lignes équipotentielles sont données par $\Phi = \text{constante} = \alpha$, i.e.

$$V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta = \alpha$$

Ces courbes sont représentées en pointillé à la figure 9-14 et sont orthogonales à la famille des lignes de courant.

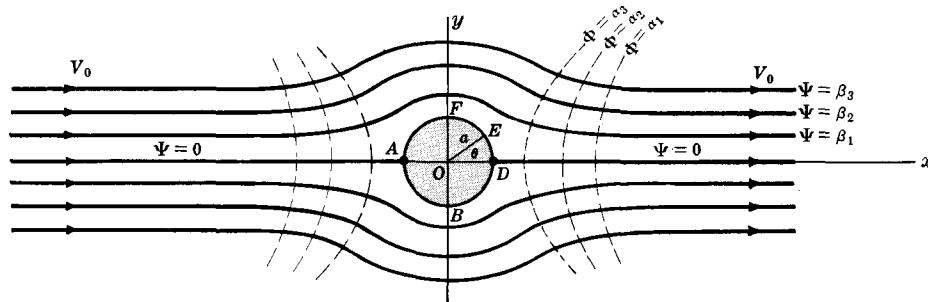


Fig. 9-14

(b) Le cercle $r = a$ représente une ligne de courant ; comme il n'y a aucun écoulement à travers une ligne de courant on peut considérer celle-ci comme un obstacle circulaire de rayon a , placé sur le parcours du fluide.

(c) On a

$$\Omega'(z) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + i \frac{V_0 a^2}{r^2} \sin 2\theta$$

La vitesse complexe est donc

$$\mathcal{V} = \overline{\Omega'(z)} = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - i \frac{V_0 a^2}{r^2} \sin 2\theta \quad (1)$$

et son module est

$$\begin{aligned} V = |\mathcal{V}| &= \sqrt{\left\{ V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{V_0 a^2}{r^2} \sin 2\theta \right\}^2} \\ &= V_0 \sqrt{1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{a^4}{r^4}} \end{aligned} \quad (2)$$

En des points éloignés de l'obstacle, on voit d'après (1) que $\mathcal{V} = V_0$ approximativement, i.e. le fluide se déplace dans la direction positive de l'axe des x à vitesse constante V_0 .

(d) Les points stationnaires, i.e. les points en lesquels la vitesse est nulle, sont donnés par

$$\Omega'(z) = 0, \quad \text{i.e.} \quad V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = a \quad \text{et} \quad z = -a$$

Les points stationnaires sont donc les points A et D de la figure 9-14.

11. Montrer que par la transformation $w = z + \frac{a^2}{z}$ l'écoulement fluide du plan des z considéré au problème 10 est transformé en un écoulement uniforme à vitesse V_0 dans le plan des w .

Le potentiel complexe de l'écoulement dans le plan des w est donné par

$$V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = V_0 w$$

qui représente un écoulement uniforme à vitesse constante V_0 dans le plan des w [comparer avec le résultat A-4 page 206].

En général la transformation $w = \Omega(z)$ transforme un écoulement fluide du plan des z de potentiel complexe $\Omega(z)$, en un écoulement uniforme du plan des w . Ceci est très utile pour déterminer les potentiels complexes relatifs à des écoulements compliqués au moyen de transformations conformes.

12. Un fluide sort avec un débit constant d'une source linéaire perpendiculaire au plan des z en $z = 0$ [figure 9-15]. (a) Montrer que la vitesse du fluide à une distance r de la source est $V = k/r$ où k est une constante. (b) Montrer que le potentiel complexe est $\Omega(z) = k \log z$. (c) Quelle modification doit-on apporter à (b) si la source est en $z = a$? (d) De quelle façon doit-on modifier (b) si l'on remplace la source par un puits dans lequel le fluide disparaît avec un débit constant ?
- (a) Considérons une portion de longueur unité de la source linéaire [fig. 9-16]. Si V_r désigne la vitesse radiale du fluide à une distance r de la source et si σ est la densité du fluide (supposé incompressible si bien que σ est constant) on a :

Masse du fluide sortant d'un élément de source de longueur unité par unité de temps

= Masse de fluide traversant la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur 1

= (Surface latérale) (vitesse radiale) (densité du fluide)

$$= (2\pi r \cdot 1)(V_r)(\sigma) = 2\pi r V_r \sigma$$

Par hypothèse ceci est constant = κ , d'où

$$V_r = \frac{\kappa}{2\pi\sigma r} = \frac{k}{r}$$

où $k = \kappa/2\pi\sigma$ est appelé la force de la source

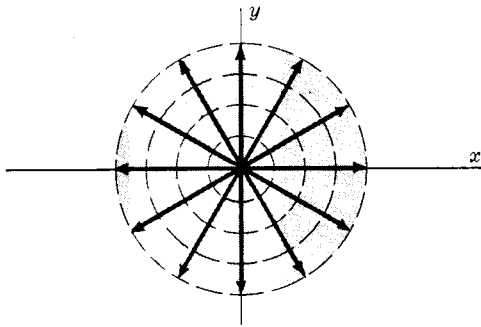


Fig. 9-15

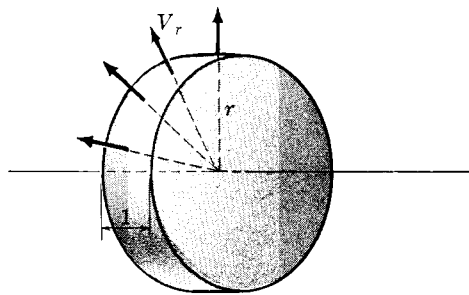


Fig. 9-16

- (b) De $V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{k}{r}$, on tire par intégration $\Phi = k \log r$ en omettant la constante d'intégration.

Mais ceci est la partie réelle de $\Omega(z) = k \log z$ qui est donc le potentiel complexe cherché.

- (c) Si la source linéaire est en $z = a$ au lieu de $z = 0$, on remplacera z par $z - a$ ce qui donne le potentiel complexe $\Omega(z) = k \log(z - a)$.
- (d) Si l'on remplace la source par un puits le potentiel complexe devient $\Omega(z) = -k \log z$, le signe "moins" traduisant le fait que la vitesse est dirigée vers $z = 0$.

De même, $\Omega(z) = -k \log(z - a)$ est le potentiel complexe relatif à un puits en $z = a$.

13. (a) Trouver le potentiel complexe dû à une source en $z = -a$ et à un puits en $z = a$ de même puissance k . (b) Déterminer et représenter graphiquement les équipotentiellles et les lignes de courant. (c) Déterminer la vitesse du fluide en un point quelconque.

(a) Le potentiel complexe dû à une source en $z = -a$, de force k est $k \operatorname{Log}(z + a)$

Le potentiel complexe dû à un puits de même force en $z = a$, est $-k \operatorname{Log}(z - a)$.

D'où par superposition :

Le potentiel complexe dû à une source en $z = -a$ et à un puits de même force k en $z = a$ est

$$\Omega(z) = k \operatorname{Log}(z + a) - k \operatorname{Log}(z - a) = k \operatorname{Log}\left(\frac{z + a}{z - a}\right)$$

(b) Soit $z + a = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - a = r_2 e^{i\theta_2}$. On a

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = k \operatorname{Log}\left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\right) = k \operatorname{Log}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + ik(\theta_1 - \theta_2)$$

si bien que $\Phi = k \operatorname{Log}(r_1/r_2)$, $\Psi = k(\theta_1 - \theta_2)$, les équipotentiellles et les lignes de courant sont alors données par

$$\Phi = k \operatorname{Log}(r_1/r_2) = \alpha, \quad \Psi = k(\theta_1 - \theta_2) = \beta$$

Les relations $r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + a}\right)$, $\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - a}\right)$ permettent d'écrire l'équation des équipotentiellles sous la forme

$$\frac{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} = e^{\alpha/k}$$

ce qui peut encore s'exprimer par

$$[x - a \coth(\alpha/k)]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(\alpha/k)}$$

ce qui donne pour les diverses valeurs de α des cercles centrés en $a \coth(\alpha/k)$ et ayant pour rayon $a [\operatorname{sh}(\alpha/k)]^{-1}$.

Ces cercles ont été représentés en traits interrompus à la figure 9-17.

Les lignes de courant sont données par

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - a}\right) = \beta/k$$

On obtient en prenant la tangente des deux membres et en simplifiant

$$x^2 + [y + a \cotg(\beta/k)]^2 = a^2 [\sin(\beta/k)]^{-2}$$

Ce qui pour les différentes valeurs de β donne des cercles centrés en $-a \cotg(\beta/k)$ et ayant pour rayon $a [\sin(\beta/k)]^{-1}$. Ces cercles qui passent par $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ ont été représentés en traits pleins à la figure 9-17.

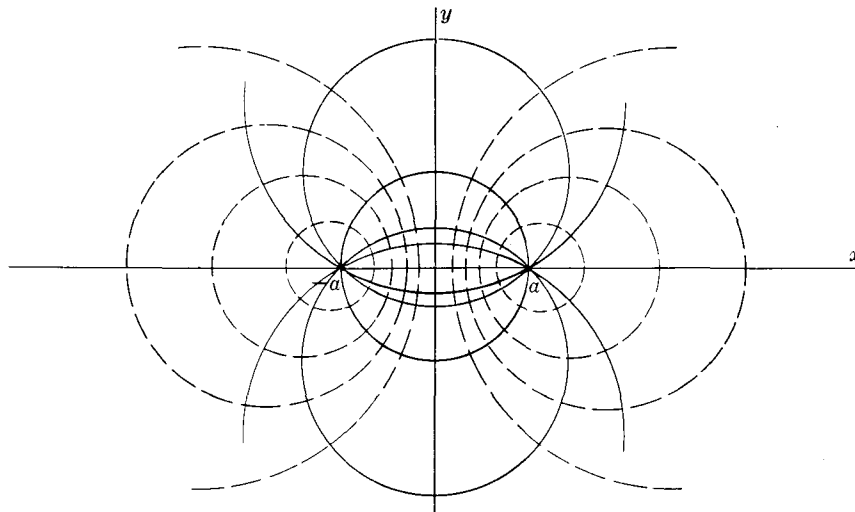


Fig. 9-17

$$\begin{aligned}
 (c) \text{ Vitesse} &= |\Omega'(z)| = \left| \frac{k}{z+a} - \frac{k}{z-a} \right| = \frac{2ka}{z^2 - a^2} \\
 &= \frac{2ka}{a^2 - r^2 e^{2i\theta}} = \frac{2ka}{\sqrt{a^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + r^4}}
 \end{aligned}$$

14. Etudier le mouvement d'un fluide de potentiel complexe $\Omega(z) = ik \operatorname{Log} z$ où $k > 0$.

Si $z = re^{i\theta}$, $\Omega(z) = \Phi + i\Psi = ik(\operatorname{Log} r + i\theta) = ik \operatorname{Log} r - k\theta$ ou $\Phi = -k\theta$, $\Psi = k \operatorname{Log} r$.

Les lignes de courant sont données par

$$\Psi = \text{constante} \quad \text{ou} \quad r = \text{constante}$$

ce qui définit des cercles concentriques centrés en $z = 0$ (en traits pleins dans la figure 9-18).

Les équipotentiels données par $\theta = \text{constante}$ sont tracées en pointillé dans la figure 9-18.

$$\text{De} \quad \Omega'(z) = \frac{ik}{z} = \frac{ik}{r} e^{-i\theta} = \frac{k \sin \theta}{r} + \frac{ik \cos \theta}{r},$$

on déduit la vitesse complexe

$$\mathcal{V} = \overline{\Omega'(z)} = \frac{k \sin \theta}{r} - \frac{ik \cos \theta}{r}$$

ce qui montre que la vitesse du fluide est comme indiqué sur la figure dirigée dans le sens rétrograde. La vitesse est donnée par $V = |\mathcal{V}| = k/r$.

Le potentiel complexe donné est donc relatif à l'écoulement d'un fluide en rotation autour de $a = 0$. On dit parfois que l'on a affaire à un tourbillon en $z = 0$.

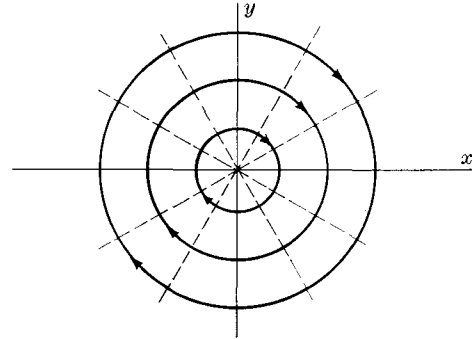


Fig. 9-18

15. Montrer que la circulation autour du tourbillon du problème 14 est donnée par $\gamma = 2k\pi$.

Si la courbe C entoure $z = 0$, l'intégrale définissant la circulation est

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \oint_C V_t ds = \oint_C V_x dx + V_y dy = \oint_C -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \oint_C -d\Phi \\
 &= \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k
 \end{aligned}$$

Exprimé au moyen de la circulation le potentiel complexe s'écrit $\Omega(z) = \frac{i\gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z$.

16. Etudier le mouvement d'un fluide admettant pour potentiel complexe

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z$$

Le potentiel complexe considéré s'obtient par superposition des potentiels des problèmes 10 et 15.

$$\text{Si } z = re^{i\theta}, \quad \Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\gamma \theta}{2\pi} + i \left\{ V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \operatorname{Log} r \right\}$$

Les équipotentiels et les lignes de courant sont données par

$$V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\gamma \theta}{2\pi} = \alpha, \quad V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \operatorname{Log} r = \beta$$

Il y a en général deux points stationnaires donnés par $\Omega'(z) = 0$, i.e.,

$$V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{-i\gamma}{4\pi V_0} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2 V_0^2}}$$

Dans le cas où $\gamma = 4\pi a V_0$ il existe seulement un point stationnaire.

La courbe $r = a$ étant une ligne de courant correspondant à $\beta = \frac{\gamma}{2\pi} \text{Log } a$, on en déduit que l'écoulement considéré est celui qui résulte de la présence d'un obstacle circulaire comme dans le problème 10. En des points éloignés de cet obstacle le fluide a la vitesse V_0 car $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega'(z) = V_0$.

La nature de l'écoulement change selon les valeurs de γ . On a représenté deux cas possibles dans les figures 9-19 et 9-20. La figure 9-19 correspond à $\gamma < 4\pi a V_0$; les points stationnaires sont en A et B . La figure 9-20 correspond à $\gamma > 4\pi a V_0$ et il y a un seul point stationnaire en C .

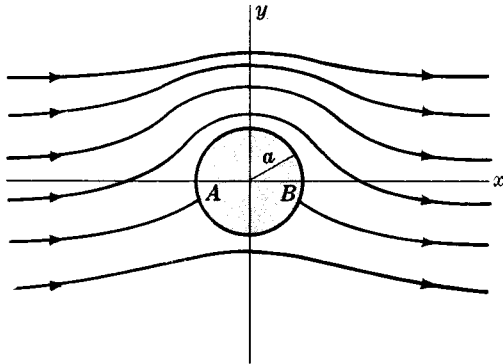


Fig. 9-19

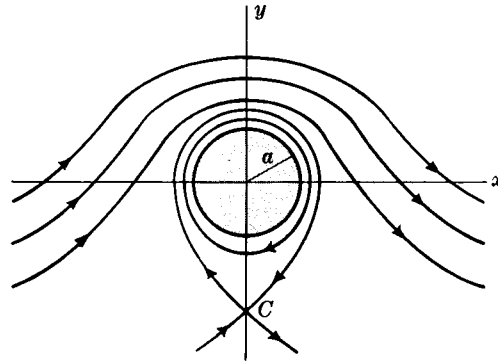


Fig. 9-20

THEOREME DE BLASIUS

17. Soit $\Omega(z)$ le potentiel complexe associé à un écoulement fluide autour d'un obstacle cylindrique de longueur unité limité dans le plan des z par une courbe fermée simple C . Démontrer que l'ensemble des forces exercées par le fluide sur l'obstacle est donné par

$$\bar{F} = X - iY = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$$

où X et Y sont les composantes cartésiennes de la force et σ la densité du fluide

La force agissant sur un élément d'aire ds dans la figure 9-21 est normale à ds et est donnée en grandeur par $P ds$ où P est la pression. En utilisant les composantes de cette force sur l'axe des x et l'axe des y on voit que

$$\begin{aligned} dF &= dX + i dY \\ &= -P ds \sin \theta + i P ds \cos \theta \\ &= i P ds (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= i P ds e^{i\theta} \\ &= i P dz \end{aligned}$$

à l'aide de

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy \\ &= ds \cos \theta + i ds \sin \theta \\ &= ds e^{i\theta} \end{aligned}$$

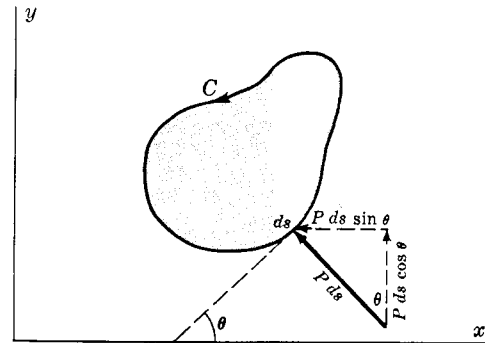


Fig. 9-21

C représentant une ligne de courant on en déduit d'après le théorème de Bernoulli, $P + \frac{1}{2} \sigma V^2 = K$ ou $P = K - \frac{1}{2} \sigma V^2$, où V est la vitesse du fluide sur une ligne de courant. On a d'autre part d'après le problème 49, $\frac{d\Omega}{dz} = V e^{-i\theta}$.

On en déduit par intégration sur C

$$\begin{aligned}
 F &= X + iY = \oint_C iP dz = i \oint_C (K - \frac{1}{2}\sigma V^2) dz \\
 &= -\frac{1}{2}i\sigma \oint_C V^2 dz = -\frac{1}{2}i\sigma \oint_C V^2 e^{i\theta} ds \\
 &= -\frac{1}{2}i\sigma \oint_C (V^2 e^{2i\theta})(e^{-i\theta} ds)
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \bar{F} &= X - iY = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C (V^2 e^{-2i\theta})(e^{i\theta} ds) \\
 &= \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz
 \end{aligned}$$

18. Soit M le moment résultant à l'origine des forces de pression sur l'obstacle du problème 17. Montrer que

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \right\}$$

Considérons les moments comptés dans le sens direct comme positifs. Le moment à l'origine des forces agissant sur l'élément ds de la figure 9-21 est

$$dM = (P ds \sin \theta)y + (P ds \cos \theta)x = P(y dy + x dx)$$

car $ds \sin \theta = dy$ et $ds \cos \theta = dx$. On en déduit d'après le théorème de Bernoulli le moment résultant

$$\begin{aligned}
 M &= \oint_C P(y dy + x dx) = \oint_C (K - \frac{1}{2}\sigma V^2)(y dy + x dx) \\
 &= K \oint_C (y dy + x dx) - \frac{1}{2}\sigma \oint_C V^2 (y dy + x dx) \\
 &= 0 - \frac{1}{2}\sigma \oint_C V^2 (x \cos \theta + y \sin \theta) ds
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\oint_C (y dy + x dx) = 0$ car $y dy + x dx$ est une différentielle exacte. On a donc

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{1}{2}\sigma \oint_C V^2 (x \cos \theta + y \sin \theta) ds \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C V^2 (x + iy)(\cos \theta - i \sin \theta) ds \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C V^2 z e^{-i\theta} ds \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C z (V^2 e^{-2i\theta})(e^{i\theta} ds) \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}\sigma \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \right\}
 \end{aligned}$$

On écrit quelquefois ce résultat sous la forme $M + iN = -\frac{1}{2}\sigma \oint_C z \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$, N n'ayant pas d'interprétation physique simple.

19. Quelle est la résultante des forces agissant sur l'obstacle cylindrique du problème 16 ?

Le potentiel complexe relatif à l'écoulement du problème 16 est

$$\Omega = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z$$

où V_0 est la vitesse du fluide en des points éloignés de l'obstacle et où γ est la valeur de la circulation. D'après le problème 17 la résultante cherchée F est donnée par

$$\begin{aligned}\bar{F} &= X - iY = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left\{ V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} \right\}^2 dz \\ &= \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left\{ V_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^2 + \frac{2iV_0\gamma}{2\pi z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right\} dz = -\sigma V_0 \gamma\end{aligned}$$

On en déduit $X = 0$, $Y = \sigma V_0 \gamma$ ce qui montre l'existence d'une force dans la direction de l'axe des y positifs et de grandeur $\sigma V_0 \gamma$.

APPLICATIONS A L'ELECTROSTATIQUE.

20. (a) Trouver le potentiel complexe créé par une répartition linéaire de charges de densité q , située sur une droite perpendiculaire au plan des z en $z = 0$.
 (b) Quelle modification doit-on apporter à (a) si la droite est située en $z = a$?
 (c) Quel rapprochement peut-on faire avec le potentiel complexe pour une source ou un puits ?

- (a) Le champ électrique créé par une ligne de charge q par unité de longueur est radial et la composante normale du vecteur champ est constante et égale à E_r , le long d'une équipotentielle, cependant que la composante tangentielle est nulle (voir Fig. 9.22). Si C est un cylindre de révolution d'axe situé en $z = 0$ et de rayon r , le théorème de Gauss permet d'écrire

$$\oint_C E_n ds = E_r \oint_C ds = E_r \cdot 2\pi r = 4\pi q$$

et

$$E_r = \frac{2q}{r}$$

De $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ on tire $\Phi = -2q \text{Log } r$ en omettant la constante d'intégration. Cette fonction est la partie réelle de $\Omega(z) = -2q \text{Log } z$ qui est le potentiel complexe cherché.

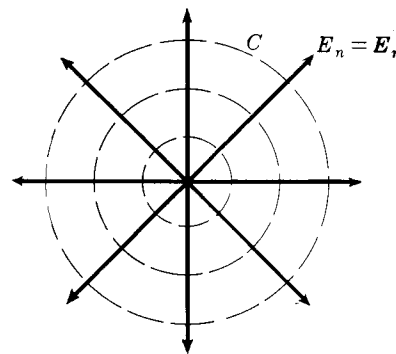


Fig. 9-22

- (b) Si la ligne est située en $z = a$ le potentiel complexe est $\Omega(z) = -2q \text{Log}(z - a)$.
 (c) On trouve le même potentiel complexe que pour une source linéaire de fluide avec $k = -2q$ [voir problème 12]. Si q est une charge positive ceci correspond au cas d'un puits linéaire.

21. (a) Déterminer le potentiel en tout point du domaine représenté à la figure 9-23, le potentiel sur l'axe des x prenant les valeurs V_0 pour $x > 0$ et $-V_0$ pour $x < 0$.

- (b) Déterminer les équipotentielles et les lignes de flux.

- (a) Nous devons trouver une fonction harmonique dans le plan prenant les valeurs V_0 pour $x > 0$, i.e. $\theta = 0$ et $-V_0$ pour $x < 0$, i.e. $\theta = \pi$. De même que dans le problème 6, si A et B sont des constantes réelles $A\theta + B$ est harmonique. Alors $A(0) + B = V_0$, $A(\pi) + B = -V_0$ d'où $A = -2V_0/\pi$, $B = V_0$ si bien que le potentiel cherché est

$$V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta\right) = V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y}{x}\right)$$

dans le demi-plan $y > 0$. Le potentiel dans le demi-plan inférieur s'en déduit par symétrie.

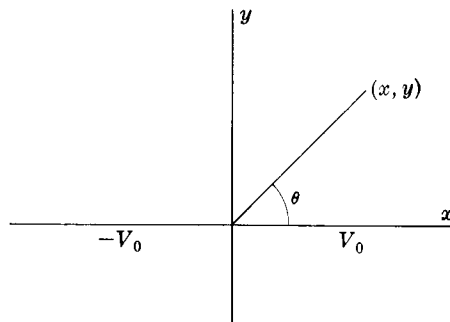


Fig. 9-23

- (b) Les équipotentielles sont données par $V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y}{x}\right) = \alpha$, i.e. $y = mx$ où m est une constante. Ce sont des droites passant par l'origine.

Les lignes de flux sont les trajectoires orthogonales des droites $y = mx$ et ont pour équation $x^2 + y^2 = \beta$. Ce sont des cercles centrés à l'origine.

Autre méthode. Une fonction conjuguée de $V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg y/x\right)$ est $-\frac{2V_0}{\pi} \log r$. Les lignes de flux sont donc données par $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constante}$ qui sont des cercles centrés à l'origine.

22. (a) Trouver le potentiel créé par une ligne de charge q par unité de longueur situé en $z = z_0$ et une ligne de charge $-q$ par unité de longueur située en $z = \bar{z}_0$.
- (b) Montrer que le potentiel créé par un plan infini [ABC dans la Fig. 9-25] maintenu au potentiel zéro (par mise à la terre) et une ligne de charge q par unité de longueur, parallèle à ce plan, peut être déduit du résultat de (a).
- (a) Le potentiel complexe dû aux deux lignes [Fig. 9-24] est

$$\Omega(z) = -2q \text{Log}(z - z_0) + 2q \text{Log}(z - \bar{z}_0) = 2q \text{Log}\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)$$

Dont la partie réelle est le potentiel cherché, i.e.

$$\Phi = 2q \text{Re}\left\{\text{Log}\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right)\right\} \quad (1)$$

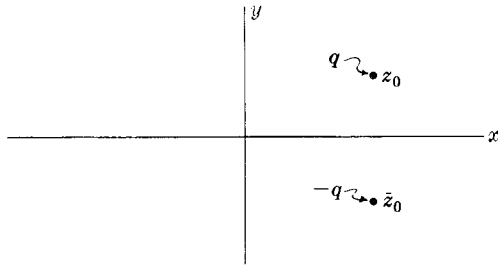


Fig. 9-24

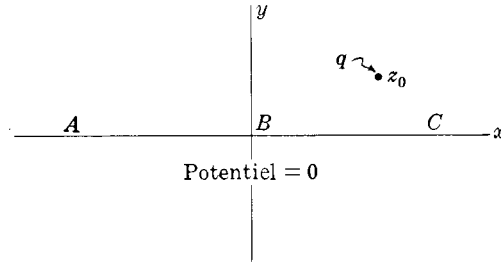


Fig. 9-25

- (b) Pour démontrer ceci nous devons montrer que le potentiel (1) se réduit à $\Phi = 0$ sur l'axe des x i.e. ABC dans la figure 9-25 est au potentiel zéro. Ceci se déduit à la fois du fait que sur l'axe des x on a $z = x$ et

$$\Omega = 2q \text{Log}\left(\frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\Omega} = 2q \text{Log}\left(\frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}\right) = -\Omega$$

i.e. $\Phi = \text{Re}\{\Omega\} = 0$ sur l'axe des x .

On peut donc remplacer la charge $-q$ en z_0 [Fig. 9-24] par un plan ABC au potentiel zéro [Fig. 9-25] et réciproquement.

23. Deux plans infinis parallèles à une distance a l'un de l'autre, sont mis à la terre (i.e. au potentiel zéro). Une ligne de charge q par unité de longueur est située entre ces plans à une distance b de l'un d'entre eux. Déterminer le potentiel en tout point situé entre ces plans.

Soit ABC et DEF [Fig. 9-26] la représentation de ces deux plans dans le plan des z ; on suppose que la charge linéaire a pour trace $z = bi$.

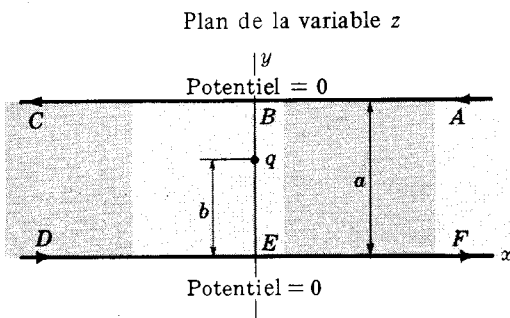


Fig. 9-26

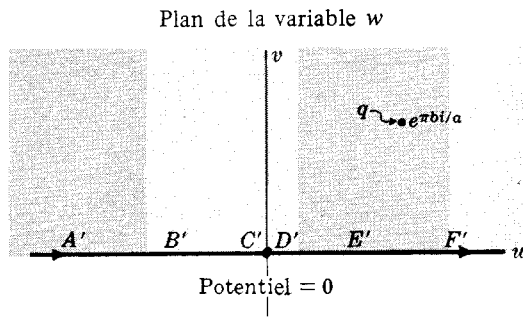


Fig. 9-27

D'après le résultat A-2 de la page 205 nous voyons que la transformation $w = e^{\pi z/a}$ transforme la région ombrée de la figure 9-26 en la moitié supérieure du plan des w de la figure 9-27. La charge linéaire q en $z = bi$ est transformée en la charge linéaire q en $w = e^{\pi bi/a}$. La frontière $ABCDEF$ de la figure 9-26 (au potentiel zéro) est transformée en l'axe des x $A'B'C'E'F'$ (au potentiel zéro) où C' et D' coïncident en $w = 0$.

D'après le problème 22 le potentiel en tout point de la région ombrée de la figure 9-27 ci-dessus est

$$\Phi = 2q \operatorname{Re} \left\{ \frac{w - e^{-\pi bi/a}}{w - e^{\pi bi/a}} \right\}$$

Le potentiel en tout point de la région ombrée de la figure 9-26 est donc

$$\Phi = 2q \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{\pi z/a} - e^{-\pi bi/a}}{e^{\pi z/a} - e^{\pi bi/a}} \right\}$$

APPLICATIONS A LA DIFFUSION DE LA CHALEUR

24. Une plaque semi-infinie (ombrée dans la figure 9-28) a ses frontières maintenues aux températures indiquées où T est une constante. Quel est l'état permanent de température dans la plaque ?

Plan de la variable z

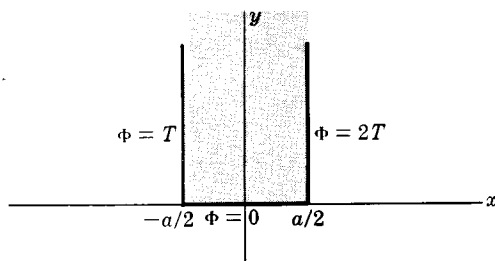


Fig. 9-28

Plan de la variable w

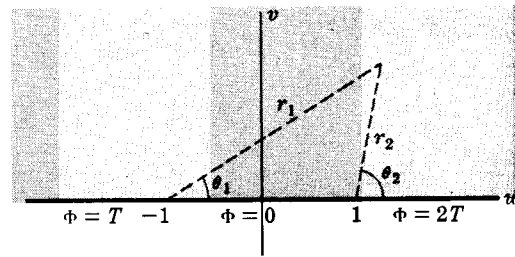


Fig. 9-29

La région ombrée du plan des z est transformée en le demi-plan supérieur dans la figure 9-29 par la transformation $w = \sin(\pi z/a)$ ce qui est équivalent à $u = \sin(\pi x/a) \operatorname{ch}(\pi y/a)$, $v = \cos(\pi x/a) \operatorname{sh}(\pi y/a)$ [voir le résultat A-3 (a) de la page 206].

On doit maintenant résoudre le problème transformé dans le plan des w . Utilisant la méthode du problème 7 on trouve que la solution dans le plan des w est

$$\Phi = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u+1} \right) - \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u-1} \right) + 2T$$

et la solution dans le plan des z est donc

$$\Phi = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\cos(\pi x/a) \operatorname{sh}(\pi y/a)}{\sin(\pi x/a) \operatorname{ch}(\pi y/a) + 1} \right\} - \frac{2T}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\cos(\pi x/a) \operatorname{sh}(\pi y/a)}{\sin(\pi x/a) \operatorname{ch}(\pi y/a) - 1} \right\} + 2T$$

25. Déterminer la répartition permanente des températures de la région ombrée de la figure 9-30, les éléments de la frontière étant maintenus aux températures indiquées.

Plan de la variable z

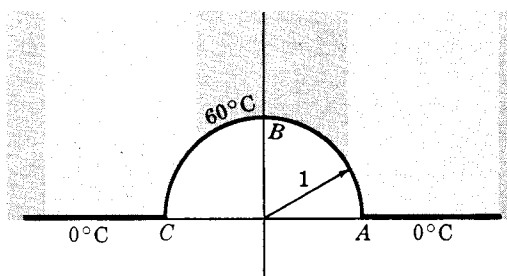


Fig. 9-30

Plan de la variable w

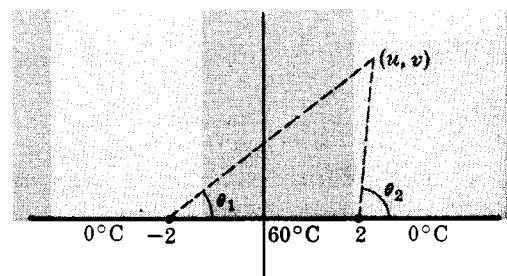


Fig. 9-31

La région considérée du plan des z est transformée en la moitié supérieure du plan des w par $w = z + \frac{1}{z}$ [résultat A-4 de la page 206] ou ce qui est la même chose par

$$u + iv = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad \text{i.e. } u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

La solution du problème dans le plan des w est en utilisant la méthode du problème 7

$$\frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u-2} \right) - \frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u+2} \right)$$

En remplaçant u et v par leurs valeurs on trouve le résultat cherché dans le plan des z

$$\frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)x - 2(x^2 + y^2)} \right\} - \frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)x + 2(x^2 + y^2)} \right\}$$

ou en coordonnées polaires

$$\frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sin \theta}{(r^2 + 1) \cos \theta - 2r} \right\} - \frac{60}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sin \theta}{(r^2 + 1) \cos \theta + 2r} \right\}$$

PROBLEMES DIVERS

26. On considère la région limitée par deux conducteurs cylindriques, concentriques, infiniment longs, de rayon r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$) chargés respectivement aux potentiels Φ_1 et Φ_2 [voir Fig. 9-32]. Trouver (a) le potentiel et (b) le champ électrique en tout point de la région considérée.

(a) Considérons la fonction $\Omega = A \operatorname{Log} z + B$ où A et B sont des constantes réelles. Si $z = re^{i\theta}$, alors

$$\Omega = \Phi + i\Psi = A \operatorname{Log} r + A i\theta + B$$

ou $\Phi = A \operatorname{Log} r + B, \quad \Psi = A\theta$

D'autre part Φ est solution de l'équation de Laplace i.e. est harmonique dans $r_1 < r < r_2$ et se réduit à $\Phi = \Phi_1$ et $\Phi = \Phi_2$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$ pourvu que A et B soient choisis tels que

$$\Phi_1 = A \operatorname{Log} r_1 + B, \quad \Phi_2 = A \operatorname{Log} r_2 + B$$

$$\text{i.e., } A = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)}, \quad B = \frac{\Phi_1 \operatorname{Log} r_2 - \Phi_2 \operatorname{Log} r_1}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)}$$

Le potentiel cherché est donc

$$\Phi = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)} \operatorname{Log} r + \frac{\Phi_1 \operatorname{Log} r_2 - \Phi_2 \operatorname{Log} r_1}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)}$$

$$\begin{aligned} (b) \text{ Vecteur champ électrique } = \mathcal{E} &= -\operatorname{grad} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ &= \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

On remarque que les lignes de force ou lignes de flux sont orthogonales aux équipotentielles, nous avons représenté quelques lignes de force en traits interrompus à la figure 9-33.

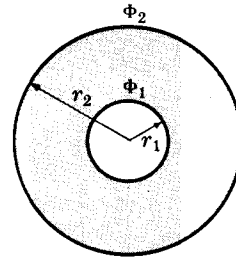


Fig. 9-32

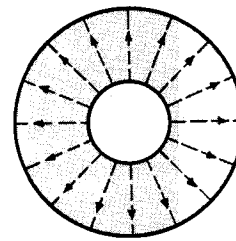


Fig. 9-33

27. Calculer la capacité du condensateur formé par les deux conducteurs cylindriques du problème 26.

Si Γ est une courbe fermée simple quelconque entourant le cylindre intérieur et si q est la charge de celui-ci, le théorème de Gauss et les résultats du problème 26 permettent d'écrire

$$\oint_{\Gamma} E_n ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r} \right\} r d\theta = \frac{2\pi(\Phi_1 - \Phi_2)}{\operatorname{Log}(r_2/r_1)} = 4\pi q$$

d'où $q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \operatorname{Log}(r_2/r_1)}$ et donc

$$\text{Capacité } C = \frac{\text{charge}}{\text{différence de potentiel}} = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{2 \operatorname{Log}(r_2/r_1)}$$

ce qui ne dépend comme il se doit que de la configuration géométrique des éléments du condensateur.

Le résultat ci-dessus est valable dans le cas où il y a du vide entre les conducteurs. Si au contraire il y a un milieu de constante diélectrique κ nous devons remplacer q par q/κ et la capacité est dans ce cas $1/[2\kappa \operatorname{Log}(r_2/r_1)]$.

28. Deux conducteurs cylindriques de même rayon R dont les centres sont à une distance D [Fig. 9-34] sont chargés respectivement aux potentiels V_0 et $-V_0$. (a) Déterminer la charge par unité de longueur nécessaire à l'obtention de ce résultat. (b) Trouver une expression de la capacité.

(a) Nous utiliserons les résultats du problème 13 car nous pouvons remplacer chacune des courbes équipotentielles (surfaces) par des conducteurs circulaires aux potentiels indiqués. Posant $\alpha = -V_0$ et $\alpha = V_0$ et remarquant que $k = 2q$, nous trouvons que les centres des cercles sont en

$$x = -a \coth(V_0/2q) \quad \text{et} \quad x = a \coth(V_0/2q)$$

$$\text{si bien que} \quad (1) \quad D = 2a \coth(V_0/2q)$$

Le rayon R des cercles est

$$(2) \quad R = a [\operatorname{ch}(V_0/2q)]^{-1}$$

La division de (1) par (2) donne $2 \operatorname{ch}(V_0/2q) = D/R$ si bien que la charge demandée est

$$q = \frac{V_0}{2 \arg \operatorname{ch}(D/2R)}$$

$$(b) \quad \text{Capacité } C = \frac{\text{charge}}{\text{différence de potentiel}} = \frac{q}{2V_0} = \frac{1}{4 \arg \operatorname{ch}(D/2R)}$$

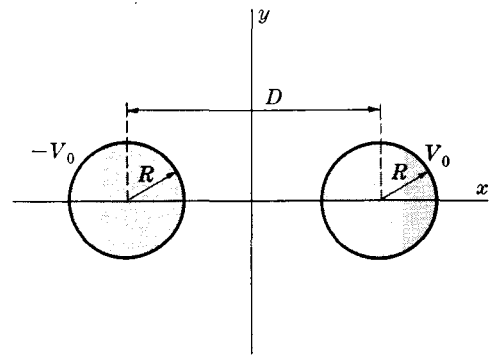


Fig. 9-34

Ce résultat est valable dans le vide. Dans un milieu de constante diélectrique κ , nous devons diviser le résultat par κ .

On remarquera que la capacité dépend comme d'habitude de la seule forme géométrique du condensateur. Le résultat est fondamental dans la théorie de la transmission par câbles.

29. Montrer l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Le problème de Dirichlet consiste en la détermination d'une fonction Φ vérifiant l'équation $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{a}$ et prenant des valeurs imposées $\Phi = f(x, y)$ sur la frontière de $\mathcal{a}$. Pour démontrer cette unicité nous devons prouver que si une solution existe c'est la seule. Pour cela supposons qu'il existe deux solutions différentes Φ_1 et Φ_2 ; on a alors

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = f(x, y) \text{ sur } C \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = f(x, y) \text{ sur } C \quad (2)$$

Par soustraction et posant $G = \Phi_1 - \Phi_2$, on déduit

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \text{ dans } \mathcal{R} \quad \text{et} \quad G = 0 \text{ sur } C \quad (3)$$

Pour montrer que $\Phi_1 = \Phi_2$ identiquement, nous devons montrer que $G = 0$ identiquement dans $\mathcal{a}$.

Remplaçons F par G dans le problème 31 chapitre 4 page 112, on obtient

$$\oint_C G \left(\frac{\partial G}{\partial x} dx - \frac{\partial G}{\partial y} dy \right) = - \iint_{\mathcal{R}} \left[G \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4)$$

Supposons que G ne soit pas constant dans $\mathcal{R}$. De $G = 0$ sur C et de $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$ identiquement dans $\mathcal{R}$ on déduit d'après (4)

$$\iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse : G est non constant dans $\mathcal{R}$ car dans de telles conditions

$$\iint_{\mathcal{R}} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy > 0$$

On en déduit que G est constant dans $\mathcal{R}$ et par continuité on doit avoir $G = 0$. On a donc $\Phi_1 = \Phi_2$ et il n'existe qu'une seule solution.

30. Une région angulaire infinie $ABDE$ d'angle $\pi/4$ [ombrée dans la figure 9-35] a un côté AB maintenu à une température constante T_1 . L'autre côté BDE a une partie BD [de longueur unité] qui est isolée le reste étant maintenu à une température constante T_2 . Déterminer la température en tout point du domaine considéré.

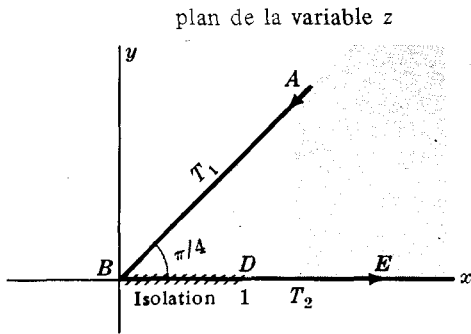


Fig. 9-35

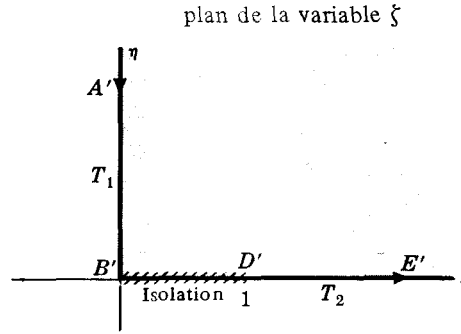


Fig. 9-36

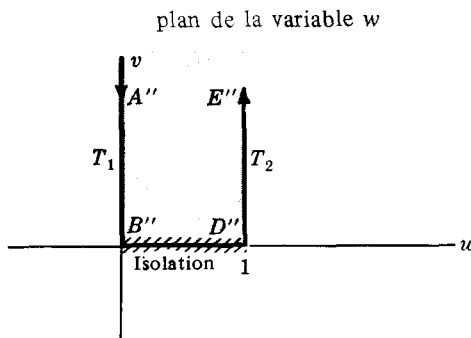


Fig. 9-37

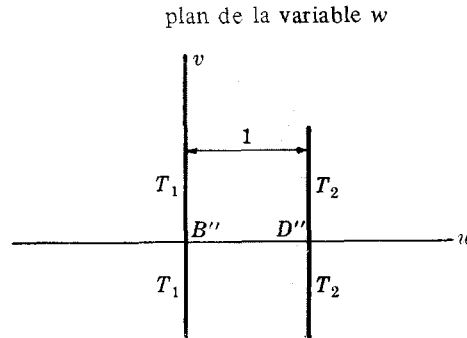


Fig. 9-38

Par la transformation $\zeta = z^2$, la région ombrée du plan des z [Fig. 9-35] est transformée en la région ombrée de la figure 9-36 avec les conditions aux limites indiquées [voir le résultat A-1 de la page 205].

Par la transformation $\zeta = \sin(\pi w/2)$, la région ombrée du plan des ζ [Fig. 9-36] est transformée en la région ombrée de la figure 9-37 avec les conditions aux limites indiquées [voir le résultat C-1 de la page 210].

Dans ces conditions le problème de répartition de température représenté à la figure 9-37 avec $B''D''$ isolé est équivalent au problème analogue de la figure 9-38 puisque par symétrie il ne peut y avoir de transfert de chaleur à travers $B''D''$. Mais on a là le problème de la détermination de la température entre deux plans parallèles maintenus respectivement aux températures constantes T_1 et T_2 . Dans ce cas la variation de la température est linéaire et est donnée par $T_1 + (T_2 - T_1)u$.

De $\zeta = z^2$ et $\zeta = \sin(\pi w/2)$ on déduit par élimination de ζ , $w = \frac{2}{\pi} \arcsin z^2$ ou $u = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}\{\arcsin z^2\}$.

La température cherchée est donc

$$T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \operatorname{Re}\{\arcsin z^2\}$$

En coordonnées polaires ceci peut s'écrire [voir problème 95]

$$T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{r^4 + 2r^2 \cos 2\theta + 1} - \frac{1}{2} \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1} \right\}$$

Problèmes supplémentaires

FONCTIONS HARMONIQUES

31. Montrer que les fonctions (a) $2xy + y^3 - 3x^2y$, (b) $e^{-x} \sin y$ sont harmoniques.
32. Montrer que les fonctions du problème 31 demeurent harmoniques après les transformations (a) $z = w^2$, (b) $z = \sin w$.
33. Si $\Phi(x, y)$ est harmonique, montrer que $\Phi(x + a, y + b)$, où a et b sont des constantes arbitraires, est aussi harmonique.
34. Si $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sont harmoniques dans $\mathcal{A}$ et si $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des constantes montrer que $c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots + c_n \Phi_n$ est harmonique dans $\mathcal{A}$.
35. Montrer que les fonctions harmoniques qui dépendent seulement de la distance r à un point fixe sont de la forme $A \log r + B$ où A et B sont des constantes arbitraires.
36. Si $F(z)$ est analytique et différente de zéro dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, montrer que la partie réelle et la partie imaginaire de $\log F(z)$ sont harmoniques dans $\mathcal{A}$.

PROBLEMES DE DIRICHLET ET DE NEUMANN

37. Trouver une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur $\operatorname{Im}\{z\} > 0$ et prenant sur l'axe des x les va-

$$\text{leurs } G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}. \quad \text{Rép. } 1 - (2/\pi) \operatorname{arctg}(y/x)$$

38. Résoudre le problème 37 avec $G(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$.

$$\text{Rép. } 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+1}\right)$$

39. Déterminer une fonction harmonique à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ et prenant les valeurs $F(\theta) = \begin{cases} T & 0 < \theta \\ -T & \pi < \theta \end{cases}$

$$\text{sur sa circonférence. } \text{Rép. } T \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2r \sin \theta}{1-r^2}\right) \right\}$$

40. Résoudre le problème 39 avec $F(\theta) = \begin{cases} T & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ -T & 3\pi/2 < \theta < 2\pi \end{cases}$.

41. Résoudre le problème 39 avec $F(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$.
42. Déterminer une fonction harmonique à l'intérieur du cercle $|z| = 2$ et prenant sur la circonférence les valeurs $F(\theta) = \begin{cases} 10 & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$. Rép. $10 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{4r \sin \theta}{4 - r^2} \right) \right\}$
43. Montrer directement que les réponses obtenues pour (a) le problème 6, (b) le problème 7, (c) le problème 8 sont effectivement des solutions aux problèmes aux limites correspondants.
44. Déterminer une fonction harmonique dans le premier quadrant $x > 0, y > 0$ et prenant les valeurs $V(x, 0) = -1, V(0, y) = 2$. Rép. $\frac{3}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} \right) - 1$
45. Trouver une fonction harmonique dans le premier quadrant $x > 0, y > 0$ et vérifiant les conditions aux limites $\Phi(x, 0) = e^{-x}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$

APPLICATIONS A L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES

46. Représenter graphiquement les lignes de courant et les équipotentielles pour un écoulement fluide de potentiel complexe (a) $z^2 + 2z$, (b) z^4 , (c) e^{-z} , (d) $\cos z$
47. Étudier l'écoulement fluide correspondant au potentiel complexe $\Omega(z) = V_0(z + 1/z^2)$.
48. Vérifier la justesse des équations (5) et (6) page 234
49. Démontrer la relation $d\Omega/dz = Ve^{-i\theta}$, où V et θ sont définis comme dans le problème 17.
50. Avec les hypothèses du problème 10, (a) montrer que la vitesse du fluide en tout point E [figure 9-14] est donnée par $2V_0 |\sin \theta|$ et (b) déterminer les points du cylindre où la vitesse est maximum.
51. (a) Si P désigne la pression au point E de l'obstacle de la figure 9-14 du problème 10 et P_∞ la pression en des points éloignés de l'obstacle, montrer que
- $$P - P_\infty = \frac{1}{2} \sigma V_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$
- (b) Montrer qu'un vide est créé en les points B et F si la vitesse du fluide est supérieure ou égale à $V_0 = \sqrt{2P_\infty / 3\sigma}$. Ce phénomène est appelé souvent cavitation.
52. Démontrer l'équation (19) page 237 par un passage à la limite dans l'équation (18).
53. Étudier l'écoulement fluide créé par trois sources de même force k situées en $z = -a, 0, a$.
54. Étudier l'écoulement fluide dû à deux sources en $z = \pm a$ et un puits en $z = 0$ les forces ayant même valeur.
55. Montrer que par la transformation $w = F(z)$ où $F(z)$ est analytique, une source (ou un puits) dans le plan des z en $z = z_0$, est transformé en une source (ou un puits) de force égale dans le plan des w en $w = w_0 = F(z_0)$.
56. Montrer que la résultante des moments sur l'obstacle cylindrique du problème 10 est nulle, expliquer physiquement ce résultat.
57. Si $\Psi(x, y)$ est la fonction de courant montrer que le débit d'un écoulement fluide à travers un arc C joignant les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est $\sigma \{ \Psi(x_2, y_2) - \Psi(x_1, y_1) \}$.
58. (a) Montrer que le potentiel complexe créé par une source de force $k > 0$ dans un fluide se déplaçant à la vitesse V_0 est $\Omega = V_0 z + k \operatorname{Log} z$ et (b) étudier le mouvement.

59. Une source et un puits de même force m sont situés en $z = \pm 1$ entre les deux droites parallèles $y = \pm 1$. Montrer que le potentiel complexe pour l'écoulement fluide ainsi défini est

$$\Omega = m \operatorname{Log} \left\{ \frac{e^{\pi(z+1)} - 1}{e^{\pi(z-1)} - 1} \right\}$$

60. On considère une source de fluide en $z = z_0$ et un mur $x = 0$. Montrer que l'écoulement résultant est équivalent à celui que l'on obtient en remplaçant le mur par une source de même force en $z = z_0$.
61. On considère un écoulement fluide entre les deux branches de l'hyperbole $ax^2 - by^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Montrer que le potentiel complexe pour l'écoulement considéré est donné par $K \operatorname{argch} \alpha z$ où K est une constante positive et $\alpha = \sqrt{ab/(a+b)}$.

APPLICATIONS A L'ELECTROSTATIQUE

62. Deux demi-plans conducteurs disposés comme dans la figure 9-39 ci-dessous sont chargés respectivement aux potentiels constants Φ_1 et Φ_2 . Déterminer (a) le potentiel Φ et (b) le champ électrique $\mathcal{E}$ en tout point situé dans la région ombrée comprise entre les deux demi-plans.

Rép. (a) $\Phi = \Phi_2 + \left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\alpha} \right) \theta$ (b) $\mathcal{E} = (\Phi_2 - \Phi_1)/\alpha r$

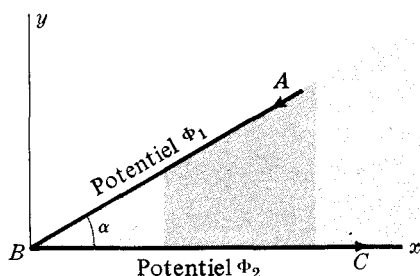


Fig. 9-39

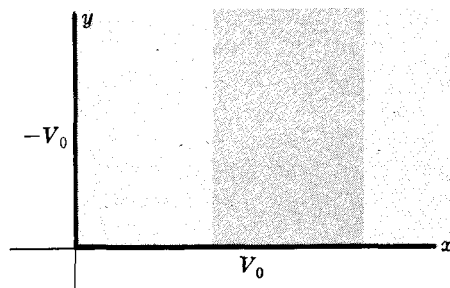


Fig. 9-40

63. Trouver (a) le potentiel et (b) le champ électrique en tout point de la région ombrée de la figure 9-40 ci-dessus avec les potentiels sur les axes des x et y constants et ayant respectivement pour valeur V_0 et $-V_0$.
- Rép. $V_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} \right) \right\}$
64. On considère dans un domaine infini trois conducteurs situés en $z = -1, 0, 1$ et maintenus respectivement aux potentiels $-V_0, 2V_0, -V_0$. Trouver (a) le potentiel, (b) le champ électrique en tout point.
- Rép. (a) $V_0 \operatorname{Log} \{ z(z^2 - 1) \}$
65. Montrer que la capacité d'un condensateur est invariante par transformation conforme.

66. On considère les demi-plans conducteurs AB et BC se coupant suivant l'angle α et étant mis à la terre [figure 9-41]. Une charge linéaire de densité q est située en z_1 dans la région ombrée à égale distance a de AB et BC .

Déterminer le potentiel. Rép. $\operatorname{Im} \left\{ -2qi \operatorname{Log} \left(\frac{z^{\pi/\alpha} - z_1^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \bar{z}_1^{\pi/\alpha}} \right) \right\}$

67. Résoudre le problème 66 si q est à la distance a de AB et b de BC .

68. Résoudre le problème 23 si l'on ajoute deux charges linéaires de densité q et $-q$ situées en $z = bi$ et $z = -bi$ respectivement ; on suppose $0 < b < a$, $0 < c < a$ et $b \neq c$.

69. Un cylindre de révolution infini a la moitié de sa surface chargée au potentiel constant V_0 , l'autre moitié étant mise à la terre ; les deux moitiés sont supposées isolées l'une de l'autre. Déterminer le potentiel en tout point.

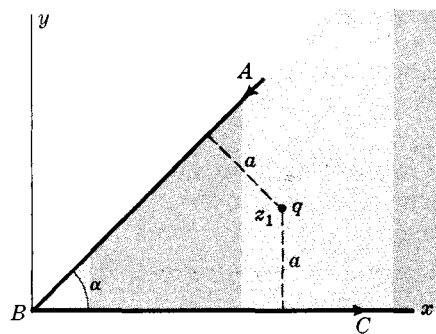


Fig. 9-41

APPLICATIONS A LA DIFFUSION DE LA CHALEUR

70. (a) Déterminer la répartition permanente des températures dans la région ombrée de la figure 9-42 ci-dessous et (b) déterminer les lignes isothermes et les lignes de flux. *Rép.* $60 - (120/\pi) \arctg(y/x)$
71. Déterminer la température au point (2, 1) de la région ombrée de la figure 9-43 ci-dessous quand l'équilibre est atteint.

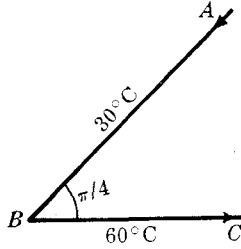


Fig. 9-42

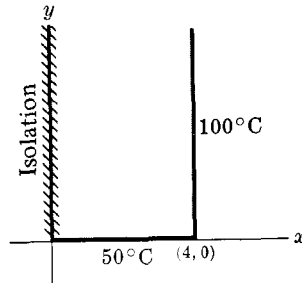


Fig. 9-43

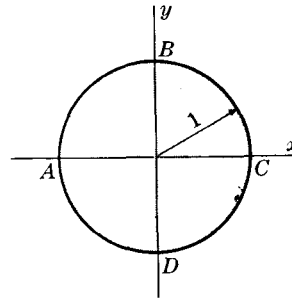


Fig. 9-44

72. Les parties convexes ABC et ADC d'un cylindre unité [figure 9-44 ci-dessus] sont maintenues aux températures 40°C et 80°C . (a) Quelle est la répartition permanente de température en tout point intérieur au cylindre ? (b) Déterminer les isothermes et les lignes de flux.
73. Quelle est la température au point (5, 2) de la région ombrée de la figure 9-45 ci-dessous, les températures en les points de la frontière étant maintenues aux valeurs indiquées. *Rép.* $45,9^\circ\text{C}$.

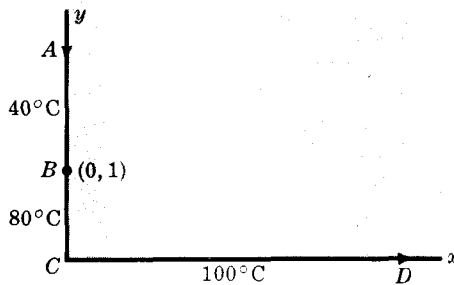


Fig. 9-45

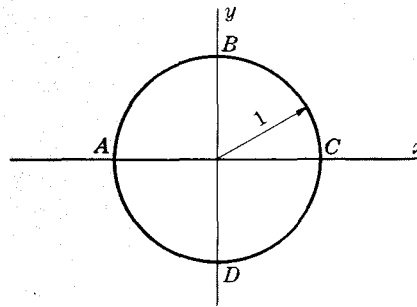


Fig. 9-46

74. On considère une plaque conductrice infinie dans laquelle on a fait un trou circulaire $ABCD$ de rayon unité [figure 9-46 ci-dessus]. Les arcs ABC et ADC sont constamment maintenus aux températures respectives 20°C et 80°C . Quel est l'état permanent des températures en tout point de la plaque ?

PROBLEMES DIVERS

75. Si $\Phi(x, y)$ est harmonique démontrer qu'il en est de même pour $\Phi(x/r^2, y/r^2)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

76. Montrer que si U et V sont continûment différentiables, alors

$$(a) \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad (b) \quad \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dx}{ds}$$

où n et s désignent respectivement la normale orientée vers l'extérieur et l'abscisse curviligne, d'une courbe fermée simple C .

77. Si U et V sont des fonctions harmoniques conjuguées, montrer que (a) $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial s}$, (b) $\frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial n}$.

78. Montrer que la fonction $\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$ est harmonique dans toute région ne contenant pas le point $r=1, \theta=0$.

79. On se propose de résoudre le problème de Neumann, i.e. de trouver une fonction V harmonique dans un ouvert connexe α et telle que sur la frontière C de α , $\partial V / \partial n = G(s)$, où s est l'abscisse curviligne sur C . On pose $H(s) = \int_a^s G(s) ds$ où a est un point quelconque de C , et l'on suppose que $\oint_C G(s) ds = 0$. Montrer que pour trouver V nous devons déterminer la fonction harmonique conjuguée U satisfaisant à $U = -H(s)$ sur C . C'est un problème de Dirichlet équivalent. [On pourra utiliser le problème 77].
80. Montrer qu'à une constante additive près la solution du problème de Neumann est unique.
81. Démontrer le théorème 3 page 234.
82. Comment doit-on modifier le théorème 3 page 234 si la condition $\Phi = a$ sur C est remplacée par $\Phi = f(x, y)$ sur C ?
83. Comment doit-on modifier le théorème 3, page 234 si la condition $\partial \Phi / \partial n = 0$ sur C est remplacée par $\partial \Phi / \partial n = g(x, y)$ sur C ?
84. Si un écoulement fluide est dû à une distribution quelconque de sources, puits ou doublets et si C est une courbe quelconque non traversée par le fluide, alors la distribution de sources, puits ou doublets situés d'un côté de C est appelée l'image de la distribution de sources, puits ou doublets situés de l'autre côté. Montrer que l'image d'une source située à l'intérieur d'un cercle C est une source de même force située au point inverse par rapport à C . [Le point P est dit l'inverse du point Q par rapport au cercle C centré en O si OPQ est une ligne droite et si $OP \cdot OQ = a^2$, a désignant le rayon de C].
85. Une source de force $k > 0$ est située au point z_0 dans un fluide contenu dans le premier quadrant les axes des x et des y formant des barrières rigides. Montrer que la vitesse du fluide en tout point est donnée par

$$k \left| (z - z_0)^{-1} + (z - \bar{z}_0)^{-1} + (z + z_0)^{-1} + (z + \bar{z}_0)^{-1} \right|$$

86. Deux conducteurs cylindriques infiniment longs ont pour sections droites des ellipses homofocales de foyers en $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ [voir figure 9-47] ; on amène ces cylindres aux potentiels constants Φ_1 et Φ_2 , montrer que la capacité par unité de longueur est

$$\frac{2\pi}{\arg \operatorname{ch} (R_2/c) - \arg \operatorname{ch} (R_1/c)}$$

[On pourra utiliser la transformation $z = c \operatorname{ch} w$]

87. On suppose dans le problème 46 que Φ_1 et Φ_2 représentent les températures des cylindres elliptiques. Quel est la répartition stationnaire de température dans la région conductive située entre les deux cylindres ?

88. On considère un écoulement fluide avec un obstacle constitué par un cylindre de révolution situé sur le fond du canal où se produit l'écoulement ; en des points éloignés de l'obstacle l'écoulement se fait à la vitesse V_0 [voir fig. 9-48].

(a) Montrer que le potentiel complexe est donné par

$$\Omega(z) = \pi a V_0 \coth (\pi a / z)$$

(b) Montrer que la vitesse du fluide au sommet du cylindre est $\frac{1}{4} \pi^2 V_0$ et comparer ce résultat avec celui obtenu dans le cas où l'obstacle circulaire est au milieu du fluide.

(c) Montrer que la différence de pression entre le sommet et la base du cylindre est $\sigma \pi^4 V_0^2 / 32$.

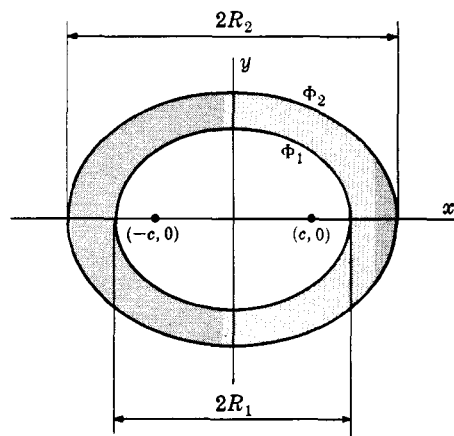


Fig. 9-47

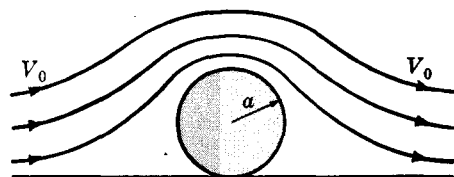


Fig. 9-48

89. (a) Montrer que le potentiel complexe pour un écoulement fluide avec obstacle elliptique tel que celui de la figure 9-49 est

$$\Omega(z) = V_0 \left\{ \zeta + \frac{(a+b)^2}{4\zeta} \right\}$$

$$\text{où } \zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \text{ et } c^2 = a^2 - b^2.$$

- (b) Montrer que la vitesse du fluide au point le plus haut et au point le plus bas du cylindre elliptique est $V_0 (1 + b/a)$. Examiner le cas $a = b$. [On pourra exprimer le potentiel complexe en coordonnées elliptiques (ξ, η) avec $z = x + iy = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta) = c \operatorname{ch} \zeta$].

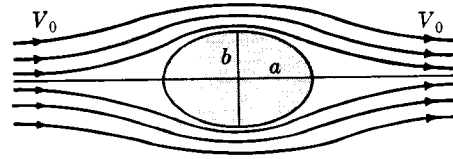


Fig. 9-49

90. Montrer que si l'écoulement du problème 89 a lieu dans une direction faisant un angle δ avec le demi-axe Ox , le potentiel complexe est donné par la formule de (a) avec $\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - c^2})e^{i\delta}$.

91. Dans la théorie de l'électricité l'équation

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2(\nabla^2 \Phi) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

appelée *équation biharmonique*, présente une grande importance. Les solutions de cette équation sont appelées fonctions biharmoniques. Montrer que si $F(z)$ et $G(z)$ sont analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{A}$, alors la partie réelle de $\bar{z} F(z) + G(z)$ est biharmonique dans $\mathcal{A}$.

92. Montrer que les fonctions biharmoniques (voir problème 91) ne restent pas en général biharmoniques après une transformation conforme.

93. (a) Montrer que $\Omega(z) = K \log \operatorname{sh}(\pi z/a)$, $K > 0$, $a > 0$ représente le potentiel complexe dû à une rangée de sources de fluide en $z = 0, \pm ai, \pm 2ai, \dots$

- (b) Montrer que le potentiel et la fonction de courant sont à une constante additive près donnés par

$$\Phi = K \log \{ \operatorname{ch}(2\pi x/a) - \cos(2\pi y/a) \}, \quad \psi = K \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{tg}(\pi y/a)}{\operatorname{th}(\pi x/a)} \right\}$$

- (c) Représenter graphiquement quelques lignes de courant de l'écoulement considéré.

94. Montrer que le potentiel complexe du problème 93 est le même que celui créé par une source située à égale distance des droites parallèles $y = \pm 3a/2$.

95. Vérifier le résultat donné à la fin du problème 30 [comparer avec le problème 137 chapitre 2 page 62].

96. Un condensateur est formé par un cylindre elliptique d'axes $2a$ et $2b$ ($a > b$), et par une plaque plane AB de longueur $2h$ [voir figure 9-50 ci-dessous]. Montrer que sa capacité est $\frac{2\pi}{\operatorname{arg} \operatorname{ch}(a/h)}$

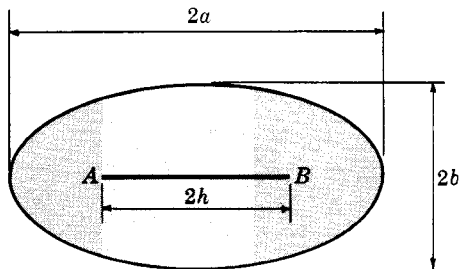


Fig. 9-50

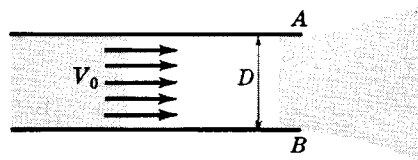


Fig. 9-51

97. Une fluide s'écoule à vitesse constante dans un canal semi-infini de largeur D et émerge par l'ouverture AB [figure 9-51 ci-dessous]. (a) Déterminer le potentiel complexe de l'écoulement. (b) Déterminer les équipotentielles et les lignes de courant, représenter graphiquement quelques lignes de chaque famille. [On pourra utiliser le résultat C-5 de la page 211].

98. Donner une interprétation du problème 30 par la théorie du potentiel

99. (a) Montrer que dans le vide la capacité du condensateur à armatures parallèles de la figure 9-52 est

$$\frac{1}{2 \arg \operatorname{ch} \left(\frac{D^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2} \right)}$$

(b) Examiner le cas $R_1 = R_2 = R$ et comparer avec le problème 28.

100. Montrer que dans le vide la capacité des deux conducteurs cylindriques parallèles de la figure 9-53 est

$$\frac{1}{2 \arg \operatorname{ch} \left(\frac{R_1^2 + R_2^2 - D^2}{2R_1R_2} \right)}$$

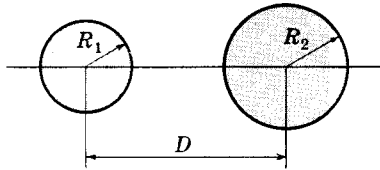


Fig. 9-52

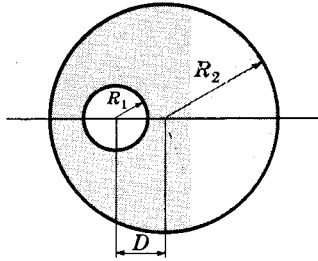


Fig. 9-53

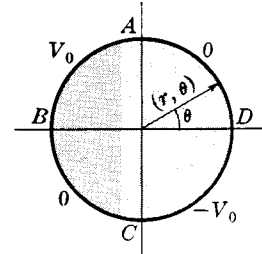


Fig. 9-54

101. Trouver le potentiel en tout point du cylindre unité de la figure 9-54 si AB , BC , CD et DA sont respectivement maintenus aux potentiels V_0 , 0 , $-V_0$ et 0 .

Rép. $\frac{V_0}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{2r \sin \theta}{1-r^2} + \operatorname{arctg} \frac{2r \cos \theta}{1-r^2} \right)$

102. La région ombrée de la figure 9-55 représente un demi-plan conducteur de la chaleur dans lequel les côtés AD , DE et DB sont respectivement maintenus aux températures 0 , T et $2T$ où T est une constante. (a) Déterminer la température en un point quelconque. (b) Donner une interprétation faisant intervenir la théorie du potentiel

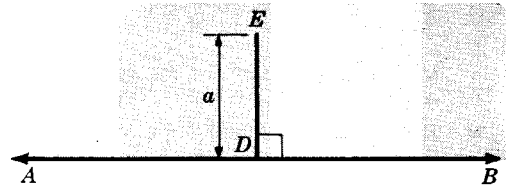


Fig. 9-55

103. Reprendre le problème précédent dans l'hypothèse où (a) DE est isolé, (b) AB est isolé.

104. Dans la figure 9-55 on suppose que DE représente un obstacle perpendiculaire au fond d'un canal infini dans lequel un fluide se déplace de la gauche vers la droite de telle façon qu'en des points éloignés de l'obstacle la vitesse soit V_0 . Trouver (a) la vitesse et (b) la pression en tout point du fluide.

105. Déterminer le régime stationnaire de température au point $(3, 2)$ de la région ombrée de la figure 9-56.

106. Un secteur de plan $ABCD$ d'angle $\pi/4$ [ombré dans la figure 9-57] a un de ses côtés (CD) maintenu à 50°C ; l'autre côté ABC présente une portion AB à la température 25°C cependant que BC de longueur unité est isolé. Déterminer la température en tout point du domaine considéré.

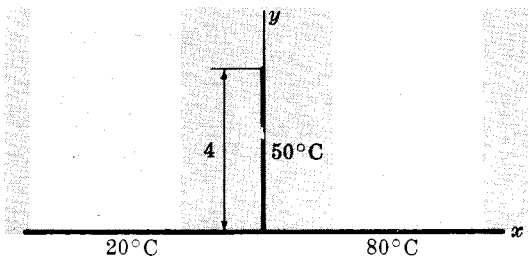


Fig. 9-56

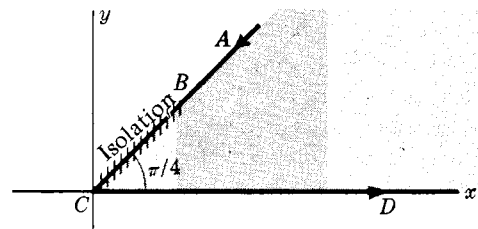


Fig. 9-57

CHAPITRE 10

Compléments

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Soit $F_1(z)$ une fonction de z analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}_1$ [figure 10-1]. Supposons que l'on puisse trouver une fonction $F_2(z)$ analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}_2$ et telle que $F_1(z) = F_2(z)$ dans $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Nous dirons dans ces conditions que $F_2(z)$ est un prolongement analytique de $F_1(z)$. Ceci signifie qu'il existe une fonction analytique dans $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ telle que $F(z) = F_1(z)$ dans $\mathcal{R}_1$ et $F(z) = F_2(z)$ dans $\mathcal{R}_2$. Dans le cas présent il suffit que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ n'ait en commun qu'un petit arc tel que LMN dans la figure 10-2.

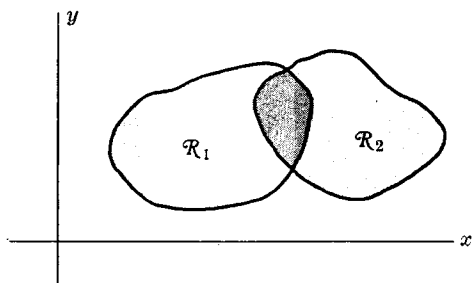


Fig. 10-1

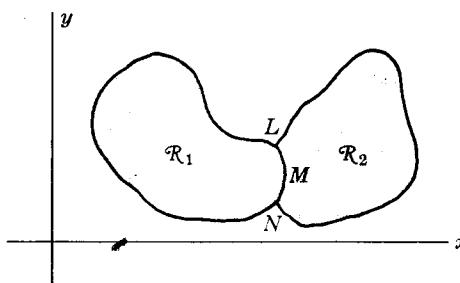


Fig. 10-2

Par prolongement analytique à l'aide d'ouverts $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4 \dots$ on peut étendre la région originale de définition à d'autres parties du plan complexe. Les fonctions $F_1(z), F_2(z), F_3(z) \dots$ définies respectivement dans $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \dots$ sont quelquefois appelées éléments de fonctions. Il est quelquefois impossible de prolonger analytiquement une fonction au-delà de la frontière de l'ouvert de définition. Cette frontière est alors appelée coupure.

Si une fonction $F_1(z)$ définie dans $\mathcal{R}_1$ est prolongée analytiquement jusqu'à $\mathcal{R}_n$ par deux chemins différents [figure 10-3], alors les deux prolongements analytiques ainsi obtenus seront identiques pourvu qu'il n'y ait pas de singularité entre les chemins utilisés ; c'est le théorème d'unicité du prolongement analytique.

Dans le cas où l'on obtient des résultats on peut montrer qu'il existe une singularité (plus précisément un point de branchement) entre les chemins utilisés. C'est de cette façon que l'on obtient les diverses branches d'une fonction multiforme. C'est dans ce genre de considérations que le concept de surfaces de Riemann présente de l'intérêt.

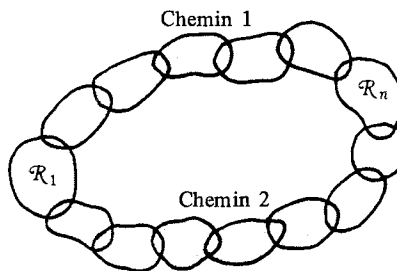


Fig. 10-3

Nous avons déjà vu comment des fonctions représentées par des séries entières peuvent être prolongées analytiquement (chapitre 6). Dans ce chapitre nous étudierons comment des fonctions définies d'une autre façon (par exemple par des intégrales), peuvent être prolongées analytiquement.

PRINCIPE DE SYMETRIE DE SCHWARZ

Supposons que $F_1(z)$ soit analytique dans l'ouvert connexe $\mathcal{R}_1$ de la figure 10-4 et que $F_1(z)$ prenne des valeurs réelles sur la partie LMN de l'axe des x .

Le principe de symétrie de Schwarz établit que le prolongement analytique de $F_1(z)$ dans la région $\mathcal{R}_2$ (considérée comme image de $\mathcal{R}_1$ à travers le miroir LMN) est donné par

$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})} \quad (1)$$

On peut étendre ce résultat à des cas où LMN est une courbe au lieu d'être un segment de droite.

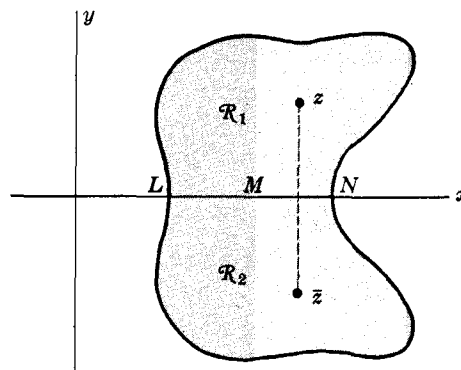


Fig. 10-4

PRODUITS INFINIS

Considérons l'expression $P_n = (1 + w_1)(1 + w_2) \dots (1 + w_n)$ notée $\prod_{k=1}^n (1 + w_k)$ où l'on suppose que pour tout k , $w_k \neq -1$. S'il existe une valeur $P \neq 0$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$, nous disons que le produit infini $(1 + w_1)(1 + w_2) \dots \equiv \prod_{k=1}^{\infty} (1 + w_k)$, ou plus simplement $\prod (1 + w_k)$

converge vers P ; dans les autres cas il sera dit divergent. Les quantités w_k peuvent être constantes ou fonctions de z .

Si un nombre fini de quantités $w_k = -1$ cependant que le produit infini obtenu en omettant ces facteurs converge, on dit que le produit infini initial converge vers zéro.

CONVERGENCE ABSOLUE, SEMI-CONVERGENCE ET CONVERGENCE UNIFORME DES PRODUITS INFINIS

Si le produit infini $\prod (1 + |w_k|)$ converge, nous disons que $\prod (1 + w_k)$ est absolument converger

Si $\prod (1 + w_k)$ converge mais que $\prod (1 + |w_k|)$ diverge nous disons que $\prod (1 + w_k)$ est semi-convergent.

Un théorème important, analogue à celui existant pour les séries, établit que si un produit infini converge absolument, i.e. si $\prod (1 + |w_k|)$ converge alors $\prod (1 + w_k)$ converge également (voir problème 65).

La notion de convergence uniforme des produits infinis se définit aisément par analogie avec les suites ou les séries. Si l'on pose $\prod_{k=1}^n \{1 + w_k(z)\} = P_n(z)$ et $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + w_k(z)\} = P(z)$ nous

disons que $P_n(z)$ converge uniformément vers $P(z)$ dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$ on peut déterminer un nombre N dépendant seulement de ϵ et non de la valeur particulière de z dans $\mathcal{R}$, tel que $|P_n(z) - P(z)| < \epsilon$ pour tout $n > N$.

Comme dans le cas des séries on peut effectuer certaines opérations avec des produits infinis absolument ou uniformément convergents, qui ne peuvent pas être effectuées avec des produits infinis ne possédant pas ces propriétés; on peut ainsi changer l'ordre des termes d'un produit infini absolument convergent sans changer la valeur de celui-ci.

QUELQUES THEOREMES IMPORTANTS SUR LES PRODUITS INFINIS

1. Une condition nécessaire pour que $\Pi(1 + w_k)$ converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Toutefois cette condition n'est pas suffisante, i.e. même si $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ le produit infini peut diverger.
2. Si $\Sigma |w_k|$ converge [i.e. si Σw_k converge absolument], alors $\Pi(1 + |w_k|)$, et donc $\Pi(1 + w_k)$ converge [i.e. $\Pi(1 + w_k)$ converge absolument]. La réciproque est exacte.
3. Si un produit infini converge absolument on peut changer l'ordre des facteurs sans changer la valeur du produit.
4. Si dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, $|w_k(z)| < M_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ où les M_k sont des constantes telles que ΣM_k converge alors $\Pi\{1 + w_k(z)\}$ est uniformément (et absolument) convergent. C'est l'analogie du critère de Weierstrass pour les séries.
5. Si les fonctions $w_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, sont analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ et si $\Sigma w_k(z)$ est absolument convergente dans $\mathcal{R}$, alors $\Pi\{1 + w_k(z)\}$ converge vers une fonction analytique dans $\mathcal{R}$.

THEOREME DE WEIERSTRASS POUR LES PRODUITS INFINIS

Soit $f(z)$ une fonction analytique pour tout z [i.e. $f(z)$ est une fonction entière], supposons qu'elle possède des zéros simples en $a_1, a_2, a_3, \dots$ avec $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Alors on peut exprimer $f(z)$ sous la forme du produit infini.

$$f(z) = f(0) e^{f'(0)z/f(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k} \right\} \quad (2)$$

On peut généraliser cette formule en considérant le cas où $f(z)$ possède des zéros en $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, avec pour ordres de multiplicité respectifs μ_k , si pour un entier N , $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k^N$ est absolument convergente alors

$$f(z) = f(0) e^{G(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_k^2} + \dots + \frac{1}{N-1} \frac{z^{N-1}}{a_k^{N-1}}} \right\}^{\mu_k} \quad (3)$$

où $G(z)$ désigne une fonction entière. Le résultat est encore valable si certains a_k sont des pôles, leur ordre de multiplicité étant dans ce cas négatif.

QUELQUES PRODUITS INFINIS PARTICULIERS

1. $\sin z = z \left\{1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{(2\pi)^2}\right\} \dots = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$
2. $\cos z = \left\{1 - \frac{z^2}{(\pi/2)^2}\right\} \left\{1 - \frac{z^2}{(3\pi/2)^2}\right\} \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right)$
3. $\operatorname{sh} z = z \left\{1 + \frac{z^2}{\pi^2}\right\} \left\{1 + \frac{z^2}{(2\pi)^2}\right\} \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$
4. $\operatorname{ch} z = \left\{1 + \frac{z^2}{(\pi/2)^2}\right\} \left\{1 + \frac{z^2}{(3\pi/2)^2}\right\} \dots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right)$

LA FONCTION GAMMA

Nous définissons la fonction gamma pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4)$$

On en déduit (voir le problème 11) la formule de récurrence

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad \text{ou} \quad \Gamma(1) = 1 \quad (5)$$

Si z est un entier positif (5) devient

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots (1) = n! \quad (6)$$

ce qui montre que la fonction gamma est une généralisation de la factorielle. Pour cette raison la fonction gamma est aussi appelée fonction factorielle et est notée $z!$ plutôt que $\Gamma(z+1)$, on pose alors $0! = 1$

On déduit aussi de (5) que si z est réel et positif $\Gamma(z)$ peut être déterminé par la seule connaissance des valeurs de $\Gamma(z)$ pour $0 < z < 1$. Si $z = \frac{1}{2}$, on a [problème 14]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (7)$$

Pour $\operatorname{Re}\{z\} \leq 0$ la définition (4) n'est plus valable car l'intégrale diverge. Toutefois par prolongement analytique on peut définir $\Gamma(z)$ dans le demi-plan de gauche. On utilise pour cela la relation (5) [voir problème 15]. En $z = 0, -1, -2, \dots$, $\Gamma(z)$ a des pôles simples [voir problème 16].

PROPRIETES DE LA FONCTION GAMMA

On a rassemblé dans la liste suivante quelques propriétés importantes de la fonction gamma. Les deux premières peuvent être prises comme définition et on peut en déduire les autres.

$$1. \quad \Gamma(z+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{(z+1)(z+2) \cdots (z+k)} k^z = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(z, k)$$

où $\Pi(z, k)$ est quelquefois appelée la fonction Π de Gauss.

$$2. \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{z}{k} \right\} e^{-z/k}$$

où $\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \log p \right\} = 0,5772157 \dots$ est la constante d'Euler.

$$3. \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

En particulier si $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$4. \quad 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

Cette formule est parfois appelée la formule de duplication pour la fonction gamma.

5. $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = m^{1/2 - mz} (2\pi)^{(m-1)/2} \Gamma(mz)$$

La propriété (4) en est un cas particulier pour $m = 2$.

$$6. \quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \cdots$$

$$7. \quad \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt = -\gamma$$

$$8. \quad \Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \oint_C t^{z-1} e^{-t} dt$$

où C est le contour de la figure 10.5. C'est un prolongement analytique au demi-plan de gauche de la fonction gamma définie dans (4).

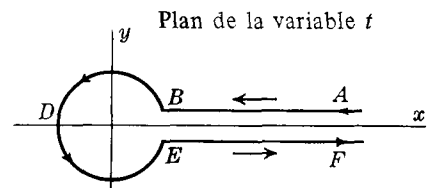


Fig. 10-5

9. On peut donner une autre expression de $\Gamma(z)$ à l'aide du même contour C [Fig. 10-5]

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2 \sin \pi z} \oint_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C (-t)^{-z} e^{-t} dt$$

LA FONCTION BETA

On définit la fonction bêta pour $\operatorname{Re} \{m\} > 0$, $\operatorname{Re} \{n\} > 0$, par

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \quad (8)$$

Comme on le voit au problème 20 cette fonction est liée à la fonction gamma par

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (9)$$

De nombreuses intégrales peuvent être exprimées au moyen de la fonction bêta et donc de la fonction gamma. On a les deux résultats intéressants suivants

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{2 \Gamma(m+n)} \quad (10)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(1-p)}{\sin p\pi} \quad (11)$$

le premier étant valable pour $\operatorname{Re} \{m\} > 0$ et $\operatorname{Re} \{n\} > 0$ et le second pour $0 < \operatorname{Re} \{p\} < 1$.

Pour $\operatorname{Re} \{m\} \leq 0$ et $\operatorname{Re} \{n\} \leq 0$ on peut étendre la définition 8 par prolongement analytique.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Considérons l'équation différentielle linéaire

$$Y'' + p(z) Y' + q(z) Y = 0 \quad (12)$$

Si $p(z)$ et $q(z)$ sont analytiques en a , alors a est appelé point ordinaire de l'équation différentielle. Les points pour lesquels $p(z)$ ou $q(z)$ ou toutes les deux, ne sont pas analytiques, sont appelés points singuliers de l'équation différentielle.

Exemple 1 : Pour $Y'' + zY' + (z^2 - 4)Y = 0$, tout point est ordinaire.

Exemple 2 : Pour $(1 - z^2)Y'' - 2zY' + 6Y = 0$ ou $Y'' - \frac{2z}{1-z^2}Y' + \frac{6}{1-z^2}Y = 0$, $z = \pm 1$ sont des points singuliers ; tous les autres sont ordinaires.

Si $z = a$ est un point singulier, mais si $(z - a)p(z)$ et $(z - a)^2 q(z)$ sont analytiques en $z = a$, alors $z = a$ est appelé un point singulier régulier. Si $z = a$ est ni un point singulier ni un point singulier régulier on dit que c'est un point singulier irrégulier.

Exemple 3 : Dans l'exemple 2, $z = 1$ est un point singulier régulier car $(z - 1)\left(-\frac{2z}{1-z^2}\right) = \frac{2z}{z+1}$ et $(z - 1)^2\left(\frac{6}{1-z^2}\right) = \frac{6-6z}{z+1}$ sont analytiques en $z = 1$. De même $z = -1$ est aussi un point singulier.

Exemple 4 : $z^3 Y'' + (1 - z) Y' - 2Y = 0$ a $z = 0$ pour point singulier. Comme $z\left(\frac{1-z}{z^3}\right) = \frac{1-z}{z^2}$ et $z^2\left(-\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{2}{z}$ ne sont pas analytiques en $z = 0$, le point $z = 0$ est un point singulier irrégulier.

Si $Y_1(z)$ et $Y_2(z)$ sont deux solutions de (12) dont le rapport n'est pas constant nous disons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Dans un tel cas si A et B sont deux constantes arbitraires la solution générale de (12) est

$$Y = AY_1 + BY_2 \quad (13)$$

Les théorèmes suivants sont fondamentaux

Théorème 1. Si $z = a$ est un point ordinaire de (12), il existe deux solutions linéairement indépendantes de (12) qui se mettent sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (14)$$

où les constantes a_k sont déterminées par substitution dans (12). Pour ce faire il faudra développer $p(z)$ et $q(z)$ en séries de puissances de $(z-a)$. Dans la pratique on remplacera $(z-a)$ par une nouvelle variable.

La solution (14) converge dans un cercle centré en $z = a$ et s'étendant jusqu'à la singularité la plus proche, de l'équation différentielle.

Exemple 5 : L'équation $(1-z^2)Y'' - 2zY' + 6Y = 0$ [voir l'exemple 2] possède une solution de la forme $\sum a_k z^k$ qui converge dans le cercle $|z| = 1$.

Théorème 2. Si $z = a$ est un point singulier régulier, il existe au moins une solution de la forme

$$(z-a)^c \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (15)$$

où c est une constante. Par substitution dans (12) et en égalant à zéro les puissances les plus basses de $(z-a)$ on obtient une équation du second degré pour c (appelée équation déterminante). Si c_1 et c_2 sont les solutions de cette équation on peut avoir l'un ou l'autre des cas suivants.

1. $c_1 - c_2$ non entier. Dans ce cas il existe deux solutions linéairement indépendantes de la forme (15).
2. $c_1 = c_2$. Dans ce cas l'une des solutions est de la forme (15), l'autre solution linéairement indépendante est de la forme

$$\text{Log}(z-a) \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^{k+c} \quad (16)$$

3. $c_1 - c_2$ entier $\neq 0$. Dans ce cas il y a ou bien une solution de la forme (15) ou deux solutions linéairement indépendantes de cette forme. S'il n'y a qu'une seule solution de la forme (15) l'autre est de la forme (16).

Toutes les solutions obtenues convergent dans un cercle centré en a et s'étendant jusqu'à la singularité la plus proche de l'équation différentielle.

SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SOUS FORME INTEGRALE

On doit quelquefois chercher une solution d'une équation différentielle linéaire sous la forme

$$Y(z) = \oint_c K(z, t) G(t) dt \quad (17)$$

où $K(z, t)$ est appelé le noyau. On utilise quelquefois $K(z, t) = e^{zt}$, soit

$$Y(z) = \oint_c e^{zt} G(t) dt \quad (18)$$

De telles solutions peuvent exister quand les coefficients de l'équation différentielle sont des fractions rationnelles (voir problèmes 25 et 26).

FONCTIONS DE BESSEL

L'équation différentielle de Bessel d'ordre n est

$$z^2 Y'' + z Y' + (z^2 - n^2) Y = 0 \quad (19)$$

Une solution pour $n \geq 0$ est

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \quad (20)$$

qui est appelée fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n .

Si n n'est pas un entier la solution générale de (18) est

$$Y = A J_n(z) + B J_{-n}(z) \quad (21)$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Cependant si n est entier $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ et (20) ne donne plus la solution générale. On peut trouver dans ce cas la solution générale comme dans les problèmes 182 et 183.

Les fonctions de Bessel ont de nombreuses propriétés intéressantes et importantes, parmi celles-ci, signalons les suivantes :

$$1. \quad e^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

La fonction du premier membre est souvent appelée fonction génératrice pour les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre entier.

$$2. \quad z J_{n-1}(z) - 2n J_n(z) + z J_{n+1}(z) = 0$$

Ce sont les formules de récurrence pour les fonctions de Bessel [voir problème 27].

$$3. \quad \frac{d}{dz} \{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z), \quad \frac{d}{dz} \{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

$$4. \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi, \quad n = \text{entier}$$

$$5. \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi - \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-n\phi - z \sinh \phi} d\phi$$

$$6. \quad \int_0^z t J_n(at) J_n(bt) dt = \frac{z \{a J_n(bz) J'_n(az) - b J_n(az) J'_n(bz)\}}{b^2 - a^2}, \quad a \neq b$$

$$7. \quad \int_0^z t J_n(at) J_n(bt) dt = \frac{az J_n(bz) J_{n-1}(az) - bz J_n(az) J_{n-1}(bz)}{b^2 - a^2}, \quad a \neq b$$

$$8. \quad \int_0^z t \{J_n(at)\}^2 dt = \frac{z^2}{2} [\{J_n(az)\}^2 - J_{n-1}(az) J_{n+1}(az)]$$

$$9. \quad J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C t^{-n-1} e^{1/2 z(t-1/t)} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

où C est une courbe fermée simple quelconque entourant $t = 0$.

$$10. \quad J_n(z) = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{n-1/2} dt \\ = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \phi) \sin^{2n} \phi d\phi$$

Une deuxième solution de l'équation de Bessel d'ordre entier est appelée fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre n ou fonction de Neumann et est donnée par

$$Y_n(z) = J_n(z) \text{Log } z - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \{G(k) + G(n+k)\} \quad (22)$$

$$\text{où } G(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad G(0) = 0.$$

Si $n = 0$, nous avons

$$Y_0(z) = J_0(z) \operatorname{Log} z + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2 4^2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \dots \quad (23)$$

On peut dans ces conditions écrire la solution de l'équation (19) où n est entier, sous la forme

$$Y = A J_n(z) + B Y_n(z) \quad (24)$$

FONCTIONS DE LEGENDRE.

L'équation différentielle de Legendre d'ordre n est

$$(1 - z^2)Y'' - 2zY' + n(n+1)Y = 0 \quad (25)$$

La solution générale de cette équation est

$$Y = A \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} z^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} z^4 - \dots \right\} \\ + B \left\{ z - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} z^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} z^5 - \dots \right\} \quad (26)$$

Si n n'est pas entier ces séries convergent pour $|z| < 1$. Si n est un entier positif ou nul on obtient des solutions polynomiales de degré n . Ces solutions sont appelées polynômes de Legendre et sont notées $P_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Si l'on choisit ces polynômes de façon que $P_n(1) = 1$, on trouve une expression de $P_n(z)$ par la formule de Rodrigues

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (27)$$

d'où $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, $P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$, $P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$, etc.

Les polynômes de Legendre ont de nombreuses propriétés dont nous donnons ici quelques exemples

$$1. \quad \frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

C'est la fonction génératrice des polynômes de Legendre.

$$2. \quad P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right\}$$

$$3. \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}} dt$$

où C est une courbe fermée simple quelconque entourant le pôle $t = z$.

$$4. \quad \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

[Voir problèmes 30 et 31]

$$5. \quad P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [z + \sqrt{z^2-1} \cos \phi]^n d\phi$$

[Voir problème 34, chapitre 6]

$$6. \quad (n+1) P_{n+1}(z) - (2n+1)z P_n(z) + n P_{n-1}(z) = 0$$

C'est la formule de récurrence pour les polynômes de Legendre [voir problème 32].

$$7. \quad (2n+1) P_n(z) = P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z)$$

Si n est un entier positif ou nul la solution générale de l'équation de Legendre peut être mise sous la forme

$$Y = A P_n(z) + B Q_n(z) \quad (28)$$

où $Q_n(z)$ est une série convergente pour $|z| < 1$ déduite de (26). Si n n'est pas un entier positif il existe deux séries solutions convergentes pour $|z| < 1$ obtenues par (26). Ces solutions de l'équation de Legendre sont appelées fonctions de Legendre ; elles ont des propriétés analogues à celles des polynômes de Legendre.

LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE

La fonction définie par

$$F(a, b; c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \dots \quad (29)$$

est appelée fonction hypergéométrique et est solution de l'équation différentielle de Gauss ou équation hypergéométrique

$$z(1-z)Y'' + \{c - (a+b+1)z\}Y' - abY = 0 \quad (30)$$

La série (29) est absolument convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Pour $|z| = 1$ elle converge absolument si $\operatorname{Re}\{c - a - b\} > 0$.

Si $|z| < 1$ et $\operatorname{Re}\{c\} > \operatorname{Re}\{b\} > 0$, nous avons

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \quad (31)$$

Pour $|z| > 1$ la fonction peut être définie par prolongement analytique.

LA FONCTION ZETA

La fonction zêta étudiée de façon approfondie par Riemann en relation avec la théorie des nombres, est définie pour $\operatorname{Re}\{z\} > 1$ par

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \quad (32)$$

On peut en étendre la définition à d'autres valeurs de z par prolongement analytique. Cette extension de la définition de $\zeta(z)$ possède la propriété intéressante suivante

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \Gamma(z) \cos(\pi z/2) \zeta(z) \quad (33)$$

Cette fonction possède également les propriétés intéressantes suivantes

$$1. \quad \zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0$$

2. La seule singularité de $\zeta(z)$ est un pôle simple en $z = 1$ avec 1 pour résidu.

3. Si B_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, est le coefficient de z^{2k} dans le développement

$$\frac{1}{2} z \cotg\left(\frac{1}{2} z\right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\text{alors} \quad \zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_k}{(2k)!} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

On a par exemple $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30, \dots$, d'où $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90, \dots$. Les B_k sont appelés nombres de Bernoulli. Pour une autre définition des nombres de Bernoulli, voir problème 163 page 171.

$$4. \quad \frac{1}{\zeta(z)} = \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \left(1 - \frac{1}{7^z}\right) \cdots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)$$

où le produit est étendu à l'ensemble de tous les nombres premiers p .

Riemann a conjecturé que tous les zéros de $\zeta(z)$ sont situés sur la droite $\operatorname{Re} \{z\} = \frac{1}{2}$, ceci n'a jamais été démontré ni infirmé. Toutefois Hardy a montré qu'il existe une infinité de zéros sur cette droite

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

$$\text{Une série} \quad a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (34)$$

est appelée développement asymptotique pour une fonction $F(z)$ si pour tout entier positif M ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^M \left\{ F(z) - \sum_{n=0}^M \frac{a_n}{z^n} \right\} = 0 \quad (35)$$

Dans un tel cas on écrit

$$F(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (36)$$

Les développements asymptotiques et les formules les utilisant sont très utiles dans l'évaluation de fonctions pour de grandes valeurs de la variable, ce qui sans cela pourrait être difficile. Dans la pratique un développement asymptotique peut diverger. Toutefois en prenant un nombre convenable de termes on peut obtenir une bonne approximation de $F(z)$. On peut faire diverses opérations avec des développements asymptotiques. Par exemple on peut les additionner, les multiplier, les intégrer terme à terme pour obtenir d'autres développements asymptotiques. Toutefois, la dérivation n'est pas toujours possible. Pour un ordre donné un développement asymptotique, s'il existe, est unique.

LA METHODE DU COL

Supposons que l'on puisse exprimer $I(z)$ sous la forme

$$I(z) = \int_C e^{zF(t)} dt \quad (37)$$

où C est un contour du plan des t . $F(t)$ étant complexe nous pouvons supposer z réel. La méthode du col permet de trouver un développement asymptotique de (37) valable pour de grandes valeurs de z . Quand on peut appliquer cette méthode on passe par les étapes suivantes.

1. On détermine les points pour lesquels $F'(t) = 0$. Ces points sont appelés des cols d'où le nom de la méthode. Nous supposons qu'il n'existe qu'un seul col noté t_0 . On peut étendre les raisonnements au cas où il y aurait plusieurs cols.
2. On suppose $F(t)$ analytique dans le voisinage de t_0 , on a donc un développement de Taylor

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F''(t_0)(t-t_0)^2}{2!} + \cdots = F(t_0) - u^2 \quad (38)$$

Dans ces conditions on déforme le contour de manière à le faire passer par le col t_0 et que $\operatorname{Re} \{F(t)\}$ soit maximum en t_0 cependant que $\operatorname{Im} \{F(t)\}$ puisse être considéré comme égal à la constante $\operatorname{Im} \{F(t_0)\}$ dans le voisinage de t_0 . Dans ces conditions la variable u définie par (38) est réelle et l'on obtient avec un haut degré d'approximation

$$I(z) = e^{zF(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zu^2} \left(\frac{dt}{du} \right) du \quad (39)$$

où de (38) on peut tirer $b_0, b_1, \dots$ tels que

$$\frac{dt}{du} = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots \quad (40)$$

3. En substituant (40) dans (39) et en effectuant les intégrations on obtient le développement asymptotique cherché

$$I(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{zF(t_0)} \left\{ b_0 + \frac{1}{2} \frac{b_2}{z} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{b_4}{z^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{b_6}{z^3} + \dots \right\} \quad (41)$$

Dans beaucoup de cas le premier terme seul suffit et l'on trouve

$$I(z) \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{zF''(t_0)}} e^{zF(t_0)} \quad (42)$$

On connaît d'autres méthodes analogues à celle-ci, par exemple la méthode de Laplace, la méthode de la phase stationnaire.

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES PARTICULIERS

1. La fonction gamma

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51,840z^3} + \dots \right\} \quad (43)$$

qui est quelquefois appelée développement asymptotique de Stirling pour la fonction gamma. Il est valable pour de grandes valeurs de $|z|$ telles que $-\pi < \arg z < \pi$.

Si n est réel et grand nous avons

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta/12n} \quad \text{où } 0 < \theta < 1 \quad (44)$$

en particulier si n est un entier positif nous avons

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (45)$$

appelée formule de Stirling pour n !

2. Fonctions de Bessel

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \{ P(z) \cos(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi) + Q(z) \sin(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi) \} \quad (46)$$

où

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [4n^2 - 1^2] [4n^2 - 3^2] \dots [4n^2 - (4k-1)^2]}{(2k)! 2^{6k} z^{2k}} \\ Q(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [4n^2 - 1^2] [4n^2 - 3^2] \dots [4n^2 - (4k-3)^2]}{(2k-1)! 2^{6k-3} z^{2k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Ceci est valable pour de grandes valeurs de $|z|$ telles que $-\pi < \arg z < \pi$.

3. La fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \sim 1 + \frac{ze^{-z^2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})}{z^{2k}} \quad (48)$$

Ce résultat est valable pour de grandes valeurs de $|z|$ telles que $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$. Pour $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ le résultat est valable à condition de remplacer z par $-z$ dans le second membre.

4. L'exponentielle intégrale

$$\operatorname{Ei}(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}} \quad (49)$$

Ce résultat est valable pour de grandes valeurs de $|z|$ telles que $-\pi < \arg z < \pi$.

FONCTIONS ELLIPTIQUES

L'intégrale

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad |k| < 1 \quad (50)$$

est appelée intégrale elliptique de première espèce. Cette intégrale existe si w est réel et tel que $|w| < 1$. On peut par prolongement analytique étendre ceci à d'autres valeurs de w . Si l'on pose $t = \sin \theta$ et $w = \sin \phi$ l'intégrale (50) prend la forme équivalente

$$z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (51)$$

ou l'on écrit souvent $\phi = \operatorname{am} z$.

Si $k = 0$, (50) devient $z = \arcsin w$ ou de façon équivalente $w = \sin z$. Par analogie on note l'intégrale de (50) pour $k \neq 0$ par $\operatorname{sn}^{-1}(w; k)$ ou $\operatorname{sn}^{-1} w$ quand k est fixé une fois pour toutes. D'où

$$z = \operatorname{sn}^{-1} w = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (52)$$

Ceci conduit à la fonction $w = \operatorname{sn} z$ appelée fonction elliptique ou fonction elliptique de Jacobi.

Par analogie avec les fonctions trigonométriques habituelles on est amené à définir d'autres fonctions elliptiques

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z} \quad (53)$$

On utilise aussi quelquefois la fonction $\operatorname{tn} z = (\operatorname{sn} z)/(\operatorname{cn} z)$.

La liste suivante contient quelques propriétés de ces fonctions.

$$1. \operatorname{sn}(0) = 0, \operatorname{cn}(0) = 1, \operatorname{dn}(0) = 1, \operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z, \operatorname{cn}(-z) = \operatorname{cn} z, \operatorname{dn}(-z) = \operatorname{dn} z$$

$$2. \frac{d}{dz} \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cn} z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$$

$$3. \operatorname{sn} z = \sin(\operatorname{am} z), \quad \operatorname{cn} z = \cos(\operatorname{am} z)$$

$$4. \operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1 \operatorname{sn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \quad (54)$$

$$\operatorname{cn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2 - \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \quad (55)$$

$$\operatorname{dn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2 - k^2 \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} \quad (56)$$

Ces dernières formules sont les formules d'addition pour les fonctions elliptiques.

5. Les fonctions elliptiques possèdent deux périodes, pour cette raison on les appelle parfois fonctions doublement périodiques. Posons

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (57)$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} \quad (58)$$

où k et k' appelés respectivement le module et le module complémentaire sont tels que $k' = \sqrt{1-k^2}$. Les périodes de $\operatorname{sn} z$ sont dans ces conditions $4K$ et $2iK'$, celles de $\operatorname{cn} z$ sont $4K$ et $2K + 2iK'$ et celles de $\operatorname{dn} z$ sont $2K$ et $4iK'$. On en déduit qu'il existe un réseau périodique de parallélogrammes [appelé parallélogrammes des périodes] du plan complexe dans lequel les valeurs d'une fonction elliptique se répètent.

Les considérations exposées ci-dessus peuvent s'étendre à d'autres fonctions elliptiques. Il existe ainsi des fonctions elliptiques de deuxième et troisième espèce définies respectivement par

$$z = \int_0^w \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (59)$$

$$z = \int_0^w \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1+n \sin^2 \theta)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (60)$$

Problèmes résolus

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

1. Soit $F(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$, supposons que $F(z) = 0$ en tous les points d'un arc PQ intérieur à $\mathcal{R}$ [figure 10.6]. Montrer que $F(z) = 0$ dans tout $\mathcal{R}$.

Choisissons un point quelconque, z_0 par exemple, sur l'axe PQ . Il existe dans un cercle de convergence C centré en z_0 [ce cercle s'étend au moins jusqu'à la frontière de $\mathcal{R}$ où une singularité peut exister] dans lequel $F(z)$ possède un développement de Taylor de la forme

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}F''(z_0)(z-z_0)^2 + \dots$$

Mais par hypothèse $F(z_0) = F'(z_0) = F''(z_0) = \dots = 0$, on a donc $F(z) = 0$ dans C .

En choisissant un autre arc dans C on peut refaire le même raisonnement ; de cette façon on peut montrer que $F(z) = 0$ dans $\mathcal{R}$.

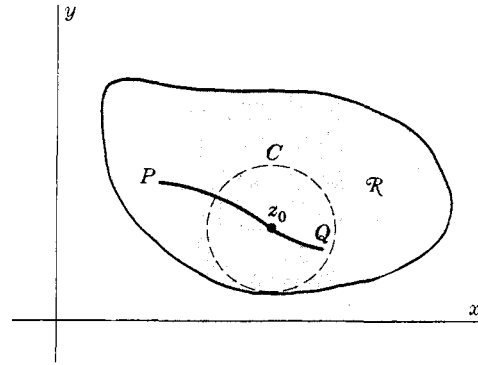


Fig. 10-6

2. En supposant l'identité $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ vérifiée pour des valeurs réelles de z montrer qu'elle l'est également pour toutes les valeurs complexes.

On pose $F(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ et l'on considère un ouvert connexe $\mathcal{A}$ du plan des z , contenant une portion de l'axe des x [figure 10-7].

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ étant analytiques dans $\mathcal{A}$, on en déduit que $F(z)$ est analytique dans $\mathcal{A}$. De plus $F(z) = 0$ sur l'axe réel. D'après le problème 1, $F(z) = 0$ identiquement dans $\mathcal{A}$ ce qui montre que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ pour tout z de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est arbitraire on obtient ainsi le résultat cherché.

Cette méthode est utile pour étendre aux valeurs complexes certains résultats vrais pour des valeurs réelles.

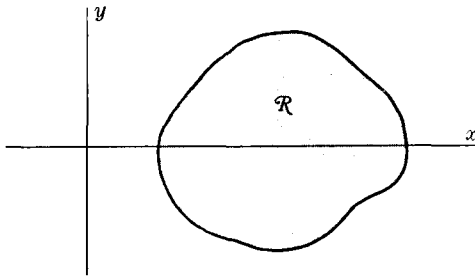


Fig. 10-7

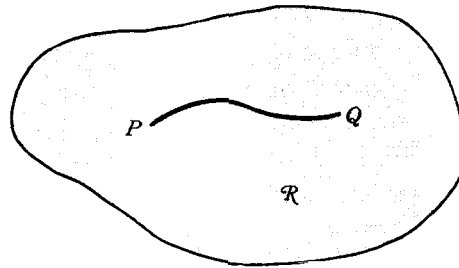


Fig. 10-8

3. Soit $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux fonctions analytiques dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ [figure 10-8], supposons que sur un arc PQ de $\mathcal{R}$, $F_1(z) = F_2(z)$. Montrer que $F_1(z) = F_2(z)$ dans $\mathcal{R}$.

C'est une conséquence du problème 1 comme on le voit en posant $F(z) = F_1(z) - F_2(z)$.

4. Soit $F_1(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}_1$ [figure 10-9] et sur la frontière $JKLM$. Supposons que nous puissions trouver une fonction $F_2(z)$ analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}_2$ et sur la frontière $JKLM$, telle que $F_1(z) = F_2(z)$ sur $JKLM$. Montrer que la fonction

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z) & \text{pour } z \text{ dans } \mathcal{R}_1 \\ F_2(z) & \text{pour } z \text{ dans } \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

est analytique dans $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

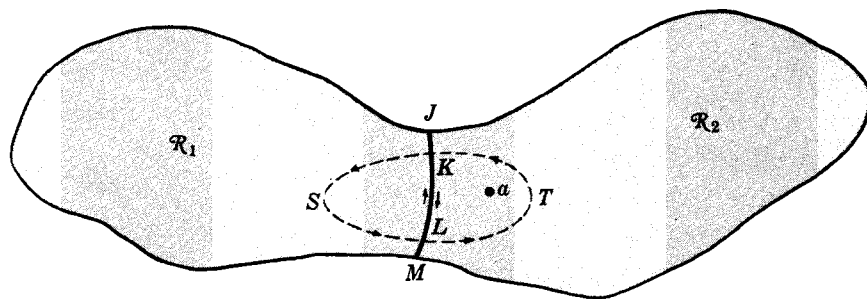


Fig. 10-9

Méthode 1.

C'est une conséquence du problème 3 car il ne peut y avoir qu'une seule fonction $F_2(z)$ dans $\mathcal{R}_2$ vérifiant les conditions imposées.

Méthode 2, à l'aide des formules intégrales de Cauchy.

Traçons la courbe fermée simple $SLTKS$ (en pointillé dans la figure 10-9) et considérons un point intérieur quelconque a . D'après la formule intégrale de Cauchy (car $F_2(z)$ est analytique à l'intérieur de $LTKL$ et sur $LTKL$ et d'autre part $F_2(z) = F_1(z)$ sur LTK)

$$F_2(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{LTKL} \frac{F_2(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{LTK} \frac{F(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{KL} \frac{F(z)}{z-a} dz$$

Nous avons également d'après le théorème de Cauchy (car $F_1(z)/(z-a)$ est analytique dans et sur $KSLK$ et de plus $F_1(z) = F(z)$ sur KSL)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{KSLK} \frac{F_1(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{KSL} \frac{F(z)}{z-a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{LK} \frac{F(z)}{z-a} dz$$

Par addition, à l'aide de $F(z) = F_1(z) = F_2(z)$ sur LK et en remarquant que les intégrales sur LK et KL s'annulent et que $F(a) = F_2(a)$

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{LTKSL} \frac{F(z)}{z-a} dz$$

De même on trouve

$$F^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{LTKSL} \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$F(z)$ est donc analytique en a . Mais a peut être choisi en un point quelconque de $\mathcal{R}$, il suffit pour cela de modifier convenablement le contour d'intégration ; on en déduit que $F(z)$ est analytique dans $\mathcal{R}$.

Méthode 3, à l'aide du théorème de Morera.

On a avec les notations de la figure 10-9

$$\begin{aligned} \oint_{KSLTK} F(z) dz &= \int_{KSL} F(z) dz + \int_{LK} F(z) dz + \int_{KL} F(z) dz + \int_{LTK} F(z) dz \\ &= \oint_{KSLK} F_1(z) dz + \oint_{LTKL} F_2(z) dz = 0 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Cauchy. L'intégrale considérée prise le long de tout contour fermé simple de $\mathcal{R}$ est donc nulle et $F(z)$ d'après le théorème de Morera est donc analytique.

La fonction $F_2(z)$ est un prolongement analytique de $F_1(z)$.

5. (a) Montrer que la fonction définie par $F_1(z) = z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$ est analytique dans l'ouvert $|z| < 1$. (b) Trouver une fonction représentant tous les prolongements analytiques possibles de $F_1(z)$.

- (a) Par le critère de d'Alembert la série considérée converge pour $|z| < 1$. La série considérée représente donc une fonction analytique dans ce domaine.
 (b) Pour $|z| < 1$, la somme de la série est $F_2(z) = z/(1+z)$. Mais cette fonction est analytique en tout point, sauf $z = -1$. Comme $F_2(z) = F_1(z)$ à l'intérieur de $|z| = 1$, $F_2(z)$ est la fonction cherchée.

6. (a) Montrer que la fonction définie par $F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt$ est analytique en tout point z tel que $\operatorname{Re}\{z\} > 0$. (b) Trouver une fonction qui soit le prolongement analytique de $F_1(z)$ dans le demi-plan de gauche $\operatorname{Re}\{z\} < 0$.

- (a) En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^3 e^{-zt} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ (t^3) \left(\frac{e^{-zt}}{-z} \right) - (3t^2) \left(\frac{e^{-zt}}{z^2} \right) + (6t) \left(\frac{e^{-zt}}{-z^3} \right) - (6) \left(\frac{e^{-zt}}{z^4} \right) \right\} \Bigg|_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{6}{z^4} - \frac{M^3 e^{-Mz}}{z} - \frac{3M^2 e^{-Mz}}{z^2} - \frac{6M e^{-Mz}}{z^3} - \frac{6 e^{-Mz}}{z^4} \right\} \\ &= \frac{6}{z^4} \quad \text{si} \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0 \end{aligned}$$

- (b) Pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, l'intégrale considérée a pour valeur $F_2(z) = 6/z^4$. Mais cette fonction est analytique en tout point $z \neq 0$. De $F_2(z) = F_1(z)$ pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ on déduit que $F_2(z) = 6/z^4$ est le prolongement analytique cherché.

PRINCIPE DE SYMETRIE DE SCHWARZ

7. Démontrer le principe de symétrie de Schwarz (voir page 266).

Les notations sont celles de la figure 10-4 page 266. Sur l'axe réel $[y = 0]$ on a $F_1(z) = F_1(x) = \overline{F_1(x)} = \overline{F_1(\bar{z})}$. Dans ces conditions d'après le problème 3 il suffit de prouver que $\overline{F_1(z)} = F_2(z)$ est analytique dans α_2 .

Soit $F_1(z) = U_1(x, y) + i V_1(x, y)$. Cette fonction étant analytique dans α_1 [i.e. $y > 0$], on a d'après les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial U_1}{\partial y} \quad (1)$$

ces dérivées partielles étant continues.

De plus $F_1(\bar{z}) = F_1(x - iy) = U_1(x, -y) + i V_1(x, -y)$, et donc $\overline{F_1(\bar{z})} = U_1(x, -y) - i V_1(x, -y)$. Si ceci doit être analytique dans α_2 on doit avoir pour $y > 0$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial(-V_1)}{\partial(-y)}, \quad \frac{\partial(-V_1)}{\partial x} = -\frac{\partial U_1}{\partial(-y)} \quad (2)$$

Ces équations sont équivalentes à (1) car $\frac{\partial(-V_1)}{\partial(-y)} = \frac{\partial V_1}{\partial y}$, $\frac{\partial(-V_1)}{\partial x} = -\frac{\partial V_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial U_1}{\partial(-y)} = -\frac{\partial U_1}{\partial y}$. On en déduit le résultat cherché.

PRODUITS INFINIS

8. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{k=1}^\infty (1 + |w_k|)$ soit convergent est que $\sum |w_k|$ converge.

Condition suffisante. Si $x > 0$ alors $1 + x \leq e^x$ et donc

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + |w_k|) = (1 + |w_1|)(1 + |w_2|) \cdots (1 + |w_n|) \leq e^{|w_1|} e^{|w_2|} \cdots e^{|w_n|} = e^{|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|}$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ converge on en déduit que P_n est une suite monotone croissante et bornée, donc convergente ;

dans ces conditions $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |w_k|)$ converge.

Condition nécessaire. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n |w_k|$, on a

$$P_n = (1 + |w_1|)(1 + |w_2|) \cdots (1 + |w_n|) \geq 1 + |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| = 1 + S_n \geq 1$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ existe, i.e. le produit infini converge, on en déduit que S_n est une suite monotone croissante et bornée, elle est donc convergente, i.e. $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ converge.

9. Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ converge

On pose $w_k = -\frac{z^2}{k^2}$. On a alors $|w_k| = \frac{|z|^2}{k^2}$ et $\sum |w_k| = |z|^2 \sum \frac{1}{k^2}$ converge. Dans ces conditions d'après le problème 8 le produit infini considéré est absolument convergent, donc convergent.

10. Montrer que $\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \cdots = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

D'après le problème 35, chapitre 7, page 192, on a

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\cotg t - \frac{1}{t}\right) dt &= \text{Log} \left(\frac{\sin t}{t}\right) \Big|_0^z = \text{Log} \left(\frac{\sin z}{z}\right) \\ &= \int_0^z \left(\frac{2t}{t^2 - \pi^2} + \frac{2t}{t^2 - 4\pi^2} + \cdots\right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \text{Log} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc $\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

LA FONCTION GAMMA

11. Montrer que $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ à partir de la définition (4), page 267.

En intégrant par parties on obtient si $\text{Re}\{z\} > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ (t^z)(-e^{-t}) \Big|_0^M - \int_0^M (zt^{z-1})(-e^{-t}) dt \right\} \\ &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

12. Montrer que $\Gamma(m) = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx$, $m > 0$.

Posons $t = x^2$, on a

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (x^2)^{m-1} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx$$

Le résultat est encore valable pour $\text{Re}\{m\} > 0$.

13. Montrer que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

Nous démontrerons d'abord cette formule pour des valeurs réelles de z telles que $0 < z < 1$. Ensuite par prolongement analytique nous pourrions étendre le résultat à d'autres valeurs de z .

D'après le problème 12 nous avons pour $0 < m < 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma(m)\Gamma(1-m) &= \left\{ 2 \int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx \right\} \left\{ 2 \int_0^\infty y^{1-2m} e^{-y^2} dy \right\} \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{1-2m} e^{-(x^2+y^2)} dx dy\end{aligned}$$

ce qui devient après passage en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^\infty (\operatorname{tg}^{1-2m} \theta) (r e^{-r^2}) dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{1-2m} \theta d\theta = \frac{\pi}{\sin m\pi}$$

en utilisant le problème 20, page 185 avec $x = \operatorname{tg}^2 \theta$ et $p = 1 - m$.

14. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

D'après le problème 12, en posant $m = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

D'après le problème 13, en posant $z = \frac{1}{2}$ il vient

$$\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^2 = \pi \quad \text{ou} \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

car $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$. On en déduit le résultat demandé.

Autre méthode. De même que dans le problème 13,

$$\begin{aligned}\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^2 &= \left\{ 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right\} \left\{ 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right\} \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi\end{aligned}$$

d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

15. Montrer par prolongement analytique que $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

Si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, $\Gamma(z)$ est défini par (4) page 267, mais cette définition ne peut être utilisée pour $\operatorname{Re}\{z\} \leq 0$. Toutefois on peut utiliser la formule de récurrence $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, valable pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, pour étendre la définition aux valeurs de z telles que $\operatorname{Re}\{z\} \leq 0$, i.e. pour obtenir un prolongement analytique dans le demi-plan de gauche.

En posant $z = -\frac{1}{2}$ dans $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on trouve $\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$ ou $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ à l'aide du problème 14.

16. (a) Montrer que $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$.

(b) Utiliser (a) pour montrer que $\Gamma(z)$ est une fonction analytique dans le plan complexe excepté en des pôles simples situés dans le demi-plan de gauche en $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

(a) Nous avons $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z)$, $\Gamma(z+3) = (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z)$ et, en général, $\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+2)(z+1)z\Gamma(z)$ d'où l'on déduit le résultat demandé.

(b) Nous savons que $\Gamma(z)$ est analytique pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ d'après la définition (4) page 267. Il est alors évident d'après (a) que $\Gamma(z)$ est analytique pour $\operatorname{Re}\{z\} \geq -n$ sauf aux pôles $z = 0, -1, -2, \dots, -n$. Comme ceci est vrai quel que soit l'entier n on en déduit le résultat demandé.

17. Utiliser le théorème de Weierstrass pour les produits infinis [équation (2), page 267] pour obtenir une expression de la fonction gamma sous forme de produit infini [propriété 2, page 268].

Soit $f(z) = 1/\Gamma(z+1)$. La fonction $f(z)$ est partout analytique et possède des zéros simples en $z = -1, -2, -3, \dots$. D'après le théorème de Weierstrass on a

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{f'(0)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

Pour déterminer $f'(0)$ remplaçons z par 1. Alors de $\Gamma(2) = 1$ on tire

$$\begin{aligned} 1 &= e^{f'(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-1/k} \\ &= e^{f'(0)} \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^M \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-1/k} \end{aligned}$$

En passant aux logarithmes ceci devient

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} - \text{Log} \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{M}\right) \right] \right\} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{M} - \text{Log} M \right\} = \gamma \end{aligned}$$

où γ est la constante d'Euler. Le résultat demandé s'obtient alors en tenant compte de $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$.

LA FONCTION BETA

18. Montrer que $B(m, n) = B(n, m)$.

En posant $t = 1 - u$ on obtient

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt = \int_0^1 (1-u)^{m-1} u^{n-1} du = B(n, m)$$

19. Montrer que $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta$.

Posons $t = \sin^2 \theta$. Il vient

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta)^{m-1} (\cos^2 \theta)^{n-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

d'après le problème 18.

20. Montrer que $B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

D'après le problème 12 on a par passage en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} \Gamma(m) \Gamma(n) &= \left\{ 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx \right\} \left\{ 2 \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \right\} \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} (\cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta) (r^{2m+2n-1} e^{-r^2}) dr d\theta \\ &= \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr \right\} \\ &= B(m, n) \Gamma(m+n) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le problème 19 et le problème 12 avec r à la place de t et $m+n$ à la place de m . On en déduit le résultat demandé.

21. Calculer (a) $\int_0^2 \sqrt{x(2-x)} dx$, (b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} \theta} d\theta$.

(a) En posant $x = 2t$ l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4t(1-t)} 2 dt &= 4 \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{1/2} dt = 4 B(3/2, 3/2) \\ &= 4 \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \frac{4(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} \theta} d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} \theta \cos^{-1/2} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

à l'aide des problèmes 13, 19 et 20.

22. Montrer que $\int_0^4 y^{3/2} (16-y^2)^{1/2} dy = \frac{64}{21} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2$.

En posant $y^2 = 16t$, i.e. $y = 4t^{1/2}$, $dy = 2t^{-1/2} dt$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{8t^{3/4}\} \{4(1-t)^{1/2}\} \{2t^{-1/2} dt\} &= 64 \int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{1/2} dt \\ &= 64 B(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}) = \frac{64 \Gamma(\frac{5}{4}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{11}{4})} = \frac{64(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{1}{4}) (\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma(\frac{3}{4})} \\ &= \frac{128\sqrt{\pi}}{21} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{128\sqrt{\pi}}{21} \frac{\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2}{\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{64}{21} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4}) = \pi / [\sin(\pi/4)] = \pi\sqrt{2}$ [problème 13].

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

23. Déterminer les points singuliers de chacune des équations différentielles suivantes, préciser dans chaque cas s'ils sont réguliers ou irréguliers.

(a) $z^2 Y'' + z Y' + (z^2 - n^2) Y = 0$ ou $Y'' + \frac{1}{z} Y' + \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2}\right) Y = 0$.

$z = 0$ est un point singulier. Puisque $z(1/z) = 1$ et $z^2 \left(\frac{z^2 - n^2}{z^2}\right) = z^2 - n^2$ sont analytiques en $z = 0$, ce point est un point singulier régulier.

(b) $(z-1)^4 Y'' + 2(z-1)^3 Y' + Y = 0$ ou $Y'' + \frac{2}{z-1} Y' + \frac{1}{(z-1)^4} Y = 0$.

Au point singulier $z = 1$, $(z-1) \left(\frac{2}{z-1}\right) = 2$ est analytique mais $(z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^4} = \frac{1}{(z-1)^2}$ ne l'est pas ; $z = 1$ est donc un point singulier irrégulier.

(c) $z^2(1-z) Y'' + Y' - Y = 0$ ou $Y'' + \frac{1}{z^2(1-z)} Y' - \frac{1}{z^2(1-z)} Y = 0$.

Au point singulier $z = 0$, $z \left\{ \frac{1}{z^2(1-z)} \right\} = \frac{1}{z(1-z)}$ et $z^2 \left\{ \frac{-1}{z^2(1-z)} \right\} = \frac{-1}{1-z}$ ne sont pas analytiques ; $z = 0$ est donc un point singulier irrégulier.

Au point singulier $z = 1$, $(z-1) \cdot \left\{ \frac{1}{z^2(1-z)} \right\} = \frac{-1}{z^2}$ et $(z-1)^2 \left\{ \frac{-1}{z^2(1-z)} \right\} = \frac{z-1}{z^2}$ sont toutes deux analytiques ; $z = 1$ est donc un point singulier régulier.

24. Trouver la solution générale de l'équation de Bessel

$$z^2 Y'' + z Y' + (z^2 - n^2) Y = 0 \quad \text{où} \quad n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Le point $z = 0$ est un point singulier régulier. On peut donc trouver une série solution de la forme

$Y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{k+c}$ où $a_k = 0$ pour $k = -1, -2, -3, \dots$. Par dérivation en omettant les limites de la sommation on obtient

$$Y' = \sum (k+c) a_k z^{k+c-1}, \quad Y'' = \sum (k+c)(k+c-1) a_k z^{k+c-2}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} z^2 Y'' &= \sum (k+c)(k+c-1) a_k z^{k+c} \\ z Y' &= \sum (k+c) a_k z^{k+c} \\ (z^2 - n^2) Y &= \sum a_k z^{k+c+2} - \sum n^2 a_k z^{k+c} \\ &= \sum a_{k-2} z^{k+c} - \sum n^2 a_k z^{k+c} \end{aligned}$$

$$\text{soit par addition } z^2 Y'' + z Y' + (z^2 - n^2) Y = \sum \{[(k+c)^2 - n^2] a_k + a_{k-2}\} z^{k+c} = 0$$

et l'on a donc

$$[(k+c)^2 - n^2] a_k + a_{k-2} = 0 \quad (1)$$

Si $k = 0$, $(c^2 - n^2) a_0 = 0$; et si $a_0 \neq 0$ on obtient l'équation déterminante $c^2 - n^2 = 0$ qui a pour racines $c = \pm n$.

Cas 1 : $c = n$

D'après (1), $[(k+n)^2 - n^2] a_k + a_{k-2} = 0$ ou $k(2n+k) a_k + a_{k-2} = 0$.

Si $k=1$, $a_1=0$. Si $k=2$, $a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$. Si $k=3$, $a_3=0$. Si $k=4$, $a_4 = -\frac{a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$, etc. On a donc

$$Y = \sum a_k z^{k+c} = a_0 z^n \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \quad (2)$$

Cas 2 : $c = -n$

Le résultat obtenu est

$$Y = a_0 z^{-n} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \quad (3)$$

que l'on peut déduire formellement du cas 1 en remplaçant n par $-n$.

La solution générale pour $n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ est donnée par

$$\begin{aligned} Y &= A z^n \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \\ &\quad + B z^{-n} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2-2n)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \dots \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Si $n = 0, \pm 1, \pm 2$ on n'obtient pas de nouvelle solution. Pour trouver dans ce cas la solution générale nous devons procéder comme dans les problèmes 175 et 176.

La singularité la plus proche de zéro étant à l'infini, les solutions convergeront quel que soit z . Ceci peut être montré aisément par le critère de d'Alembert.

SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES SOUS FORME INTEGRALE

25. (a) Chercher une solution de l'équation $z Y'' + (2n+1) Y' + z Y = 0$ sous la forme

$Y = \oint_C e^{zt} G(t) dt$. (b) En posant $Y = z^x U$ et en choisissant convenablement la constante r trouver une solution de $z^2 U'' + z U' + (z^2 - n^2) U = 0$.

$$(a) \text{ Si } Y = \oint_C e^{zt} G(t) dt, \text{ on en déduit } Y' = \oint_C t e^{zt} G(t) dt, \quad Y'' = \oint_C t^2 e^{zt} G(t) dt.$$

D'où par intégration par parties, en supposant que C est choisi de telle façon que les valeurs initiales et finales soient égales [et la partie intégrée est donc nulle] on trouve

$$\begin{aligned} zY &= \oint_C z e^{zt} G(t) dt = e^{zt} G(t) \Big|_P^P - \oint_C e^{zt} G'(t) dt = - \oint_C e^{zt} G'(t) dt \\ (2n+1)Y' &= \oint_C (2n+1)t e^{zt} G(t) dt \\ zY'' &= \oint_C z t^2 e^{zt} G(t) dt = \oint_C (z e^{zt}) \{t^2 G(t)\} dt \\ &= e^{zt} \{t^2 G(t)\} \Big|_P^P - \oint_C e^{zt} \{t^2 G(t)\}' dt \\ &= - \oint_C e^{zt} \{t^2 G(t)\}' dt \end{aligned}$$

D'où

$$zY'' + (2n+1)Y' + zY = 0 = \oint_C e^{zt} [-G'(t) + (2n+1)t G(t) - \{t^2 G(t)\}'] dt$$

Ceci est satisfait si l'on choisit $G(t)$ de telle façon que la fonction que l'on intègre soit nulle, i.e.,

$$-G'(t) + (2n+1)t G(t) - \{t^2 G(t)\}' = 0 \quad \text{ou} \quad G'(t) = \frac{(2n-1)t}{t^2+1} G(t)$$

On en déduit $G(t) = A (t^2+1)^{n-1/2}$ où A est une constante arbitraire. Une solution est

$$Y = A \oint_C e^{zt} (t^2+1)^{n-1/2} dt$$

(b) Si $Y = z^r U$, on a $Y' = z^r U' + r z^{r-1} U$ et $Y'' = z^r U'' + 2r z^{r-1} U' + r(r-1) z^{r-2} U$, d'où

$$\begin{aligned} zY'' + (2n+1)Y' + zY &= z^{r+1} U'' + 2r z^r U' + r(r-1) z^{r-1} U \\ &\quad + (2n+1) z^r U' + (2n+1) r z^{r-1} U + z^{r+1} U \\ &= z^{r+1} U'' + [2r z^r + (2n+1) z^r] U' \\ &\quad + [r(r-1) z^{r-1} + (2n+1) r z^{r-1} + z^{r+1}] U \end{aligned}$$

L'équation différentielle considérée est donc équivalente à

$$z^2 U'' + (2r+2n+1) z U' + [z^2 + r^2 + 2nr] U = 0$$

ce qui devient pour $r = -n$ $z^2 U'' + z U' + (z^2 - n^2) U = 0$.

Une solution sous forme intégrale est donc

$$U = z^n Y = A z^n \oint_C e^{zt} (t^2+1)^{n-1/2} dt$$

26. Trouver la solution générale de $Y'' - 3Y' + 2Y = 0$ par la méthode du problème 25.

On pose $Y = \oint_C e^{zt} G(t) dt$, $Y' = \oint_C t e^{zt} G(t) dt$, $Y'' = \oint_C t^2 e^{zt} G(t) dt$, d'où

$$Y'' - 3Y' + 2Y = \oint_C e^{zt} (t^2 - 3t + 2) G(t) dt = 0$$

qui est satisfaite pour $G(t) = 1/(t^2 - 3t + 2)$. On a donc

$$Y = \oint_C \frac{e^{zt}}{t^2 - 3t + 2} dt$$

Si l'on choisit C de façon que le pôle simple $t = 1$ soit intérieur à C et que l'autre pôle $t = 2$ soit extérieur à C l'intégrale vaut $2\pi i e^z$. Si $t = 2$ est dans C cependant que $t = 1$ est extérieur à C l'intégrale prend la valeur $2\pi i e^{2z}$.

La solution générale est donc $Y = A e^z + B e^{2z}$.

FONCTIONS DE BESSEL

27. Montrer que $z J_{n-1}(z) - 2n J_n(z) + z J_{n+1}(z) = 0$.

En dérivant par rapport à t les deux membres de l'identité

$$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

on obtient

$$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} \left\{ \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) J_n(z) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(z) t^{n-1}$$

$$\text{i.e.,} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} z J_n(z) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} z J_n(z) t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n J_n(z) t^{n-1}$$

D'où l'on obtient par identification selon les puissances de t

$$z J_n(z) + z J_{n+2}(z) = 2(n+1) J_{n+1}(z)$$

ce qui donne le résultat cherché en remplaçant n par $n-1$.

Etant donné que nous avons utilisé la fonction génératrice, la démonstration précédente n'est valable que pour les valeurs entières de n . Le résultat est toutefois vrai pour les valeurs non entières de n [voir problème 114].

28. Montrer que $J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C t^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} dt$, où C est une courbe fermée simple entourant $t=0$.

$$\text{Nous savons que} \quad e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) t^m$$

$$\text{ou} \quad t^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^{m-n-1} J_m(z)$$

$$\text{et} \quad \oint_C t^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) \oint_C t^{m-n-1} dt \quad (1)$$

D'autre part d'après les problèmes 21 et 22, chapitre 4, page 108, nous savons que

$$\oint_C t^{m-n-1} dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (2)$$

La série du premier membre de (1) se réduit donc à $2\pi i J_n(z)$ d'où l'on déduit le résultat cherché.

29. Montrer que si $a \neq b$

$$\int_0^z t J_n(at) J_n(bt) dt = \frac{z \{ a J_n(bz) J'_n(az) - b J_n(az) J'_n(bz) \}}{b^2 - a^2}$$

$Y_1 = J_n(at)$ et $Y_2 = J_n(bt)$ sont respectivement solutions des équations différentielles

$$(1) \quad t^2 Y_1'' + t Y_1' + (a^2 t^2 - n^2) Y_1 = 0$$

$$(2) \quad t^2 Y_2'' + t Y_2' + (b^2 t^2 - n^2) Y_2 = 0$$

En multipliant (1) par Y_2 , (2) par Y_1 , on obtient par soustraction

$$t^2(Y_2 Y_1'' - Y_1 Y_2'') + t(Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2') = (b^2 - a^2) t^2 Y_1 Y_2$$

Soit encore

$$t \frac{d}{dt} (Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2') + (Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2') = (b^2 - a^2) t Y_1 Y_2$$

ou

$$\frac{d}{dt} \{ t(Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2') \} = (b^2 - a^2) t Y_1 Y_2$$

Une intégration par rapport à t de 0 à z donne

$$(b^2 - a^2) \int_0^z t Y_1 Y_2 dt = t(Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2') \Big|_0^z$$

ou puisque $a \neq b$

$$\int_0^z t J_n(at) J_n(bt) dt = \frac{z \{ a J_n(bz) J'_n(az) - b J_n(az) J'_n(bz) \}}{b^2 - a^2}$$

FONCTIONS DE LEGENDRE

30. Montrer que $\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = 0$ si $m \neq n$.

Nous avons

$$(1) \quad (1-z^2)P_m'' - 2zP_m' + m(m+1)P_m = 0$$

$$(2) \quad (1-z^2)P_n'' - 2zP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

En multipliant (1) par P_n , (2) par P_m on déduit par soustraction

$$(1-z^2)\{P_n P_m'' - P_m P_n''\} - 2z\{P_n P_m' - P_m P_n'\} = \{n(n+1) - m(m+1)\} P_m P_n$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} \{P_n P_m' - P_m P_n'\} - 2z\{P_n P_m' - P_m P_n'\} = \{n(n+1) - m(m+1)\} P_m P_n$$

ou

$$\frac{d}{dz} \{(1-z^2)(P_n P_m' - P_m P_n')\} = \{n(n+1) - m(m+1)\} P_m P_n$$

Par intégration de -1 à $+1$ on en déduit

$$\{n(n+1) - m(m+1)\} \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = (1-z^2)(P_n P_m' - P_m P_n') \Big|_{-1}^1 = 0$$

d'où découle le résultat demandé si $m \neq n$.

Cette propriété est souvent appelée propriété d'orthogonalité, on dit que les polynômes de Legendre forment une famille de polynômes orthogonaux.

31. Montrer que $\int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz = \frac{2}{2n+1}$ si $m = n$.

En élevant au carré les deux membres de l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

on obtient

$$\frac{1}{1-2zt+t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m(z) P_n(z) t^{m+n}$$

Par intégration de -1 à $+1$ en utilisant le problème 30 on trouve

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1-2zt+t^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 P_m(z) P_n(z) dz \right\} t^{m+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \{P_n(z)\}^2 dz \right\} t^{2n} \end{aligned} \quad (1)$$

Mais le premier membre vaut

$$-\frac{1}{2t} \text{Log}(1-2zt+t^2) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{t} \text{Log} \left(\frac{1+t}{1-t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{2n+1} \right\} t^{2n} \quad (2)$$

à l'aide du problème 23 (c), chapitre 6, page 155. On obtient alors le résultat désiré par identification des coefficients de t^{2n} dans (1) et (2).

32. Montrer que $(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$.

Par dérivation par rapport à t de l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

on obtient

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(z) t^{n-1}$$

Après multiplication par $1 - 2zt + t^2$, on a

$$(z - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = (1 - 2zt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(z) t^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z P_n(z) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(z) t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nz P_n(z) t^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(z) t^{n+1} \end{aligned}$$

d'où par identification des coefficients de t^n

$$z P_n(z) - P_{n-1}(z) = (n+1) P_{n+1}(z) - 2nz P_n(z) + (n-1) P_{n-1}(z)$$

qui donne après simplification le résultat cherché.

LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE

33. Montrer que $F(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = \frac{\arcsin z}{z}$.

$$\begin{aligned} \text{De} \quad F(a, b; c; z) &= 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \dots \quad \text{on tire} \\ F(1/2, 1/2; 3/2; z^2) &= 1 + \frac{(1/2)(1/2)}{1 \cdot (3/2)} z^2 + \frac{(1/2)(3/2)(1/2)(3/2)}{1 \cdot 2 \cdot (3/2)(5/2)} z^4 \\ &\quad + \frac{(1/2)(3/2)(5/2)(1/2)(3/2)(5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3/2)(5/2)(7/2)} z^6 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{7} + \dots = \frac{\arcsin z}{z} \end{aligned}$$

d'après le problème 89, chapitre 6, page 166.

LA FONCTION ZETA

34. Montrer que la fonction zêta $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$ est analytique dans la partie du plan des z telle que $\operatorname{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$ où δ est un nombre positif quelconque.

Chaque terme $1/k^z$ est une fonction analytique. De plus si $x = \operatorname{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$ alors

$$\left| \frac{1}{k^z} \right| = \left| \frac{1}{e^{z \operatorname{Log} k}} \right| = e^{x \operatorname{Log} k} = \frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{k^{1+\delta}}$$

La série $\sum 1/k^{1+\delta}$ étant convergente on voit d'après le critère de Weierstrass que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$ converge uniformément pour $\operatorname{Re}\{z\} \geq 1 + \delta$. On en déduit que $\zeta(z)$ est analytique dans la région considérée au moyen du théorème 21, page 142.

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

35. (a) Si $p > 0$, montrer que

$$\begin{aligned} F(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt &= e^{-z} \left\{ \frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \dots (-1)^n \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{z^{p+n}} \right\} \\ &\quad + (-1)^{n+1} p(p+1) \cdots (p+n) \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}} dt \end{aligned}$$

(b) Utiliser (a) pour montrer que

$$F(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^p} dt \sim e^{-z} \left\{ \frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \dots \right\} = S(z)$$

i.e. la série du second membre est un développement de la fonction au premier membre.

(a) On obtient par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I_p &= \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^p} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_z^M e^{-t} t^{-p} dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ (-e^{-t})(t^{-p}) \Big|_z^M - \int_z^M (-e^{-t})(-pt^{-p-1}) dt \right\} \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{-z}}{z^p} - \frac{e^{-M}}{M^p} - p \int_z^M \frac{e^{-t}}{t^{p+1}} dt \right\} \\
 &= \frac{e^{-z}}{z^p} - p \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{p+1}} dt = \frac{e^{-z}}{z^p} - p I_{p+1}
 \end{aligned}$$

De même $I_{p+1} = \frac{e^{-z}}{z^{p+1}} - (p+1) I_{p+2}$ si bien que

$$I_p = \frac{e^{-z}}{z^p} - p \left\{ \frac{e^{-z}}{z^{p+1}} - (p+1) I_{p+2} \right\} = \frac{e^{-z}}{z^p} - \frac{pe^{-z}}{z^{p+1}} + p(p+1) I_{p+2}$$

En continuant de cette façon on obtient le résultat cherché.

(b) Soit $S_n(z) = e^{-z} \left\{ \frac{1}{z^p} - \frac{p}{z^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{z^{p+2}} - \dots (-1)^n \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{z^{p+n}} \right\}$, d'où

$$R_n(z) = F(z) - S_n(z) = (-1)^{n+1} p(p+1) \dots (p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}} dt$$

D'autre part pour le réel $z > 0$

$$\begin{aligned}
 |R_n(z)| &= p(p+1) \dots (p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^{p+n+1}} dt \leq p(p+1) \dots (p+n) \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{z^{p+n+1}} dt \\
 &\leq \frac{p(p+1) \dots (p+n)}{z^{p+n+1}}
 \end{aligned}$$

car $\int_z^\infty e^{-t} dt \leq \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$

On a donc $\lim_{z \rightarrow \infty} |z^n R_n(z)| \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n)}{z^p} = 0$

et on en déduit que $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n R_n(z) = 0$. Ceci démontre le résultat cherché pour le réel $z > 0$.

Le résultat peut aussi être étendu aux valeurs complexes de z .

On remarque que de $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{p(p+1) \dots (p+n)/z^{p+n+1}}{p(p+1) \dots (p+n-1)/z^{p+n}} \right| = \frac{p+n}{|z|}$, où u_n est le nième

terme de la série, on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \infty$ et la série est donc divergente d'après le critère de d'Alembert.

36. Montrer que $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} + \dots \right\}$.

Nous savons que $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \tau^z e^{-\tau} d\tau$. Ce qui devient en posant $\tau = zt$

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^\infty t^z e^{-zt} dt = z^{z+1} \int_0^\infty e^{z(\text{Log } t - t)} dt \quad (1)$$

qui a la forme (37), page 274 où $F(t) = \text{Log } t - t$.

$F'(t) = 0$ pour $t = 1$. En posant $t = 1 + w$ on trouve en utilisant le problème 23, page 154 ou d'une autre façon, le développement de Taylor

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \text{Log } t - t = \text{Log}(1+w) - (1+w) = \left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \dots \right) - 1 - w \\
 &= -1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \dots = -1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^4}{4} + \dots
 \end{aligned}$$

On en déduit d'après (1), $\Gamma(z+1) = z^{z+1} e^{-z} \int_0^\infty e^{-z(t-1)^2/2} e^{z(t-1)^3/3 - z(t-1)^4/4 + \dots} dt$

$$= z^{z+1} e^{-z} \int_{-1}^\infty e^{-zw^2/2} e^{zw^3/3 - zw^4/4 + \dots} dw \quad (2)$$

Ce qui devient en posant $w = \sqrt{2/z} v$

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2} z^{z+1/2} e^{-z} \int_{-\sqrt{z/2}}^{\infty} e^{-v^2} e^{(2/3)\sqrt{2}z^{-1/2}v^3 - z^{-1}v^4 + \dots} dv \quad (3)$$

Pour de grandes valeurs de z la borne inférieure peut être remplacée par $-\infty$, et en développant l'exponentielle on a

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2} z^{z+1/2} e^{-z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \{1 + (\frac{2}{3}\sqrt{2}z^{-1/2}v^3 - z^{-1}v^4) + \dots\} dv \quad (4)$$

$$\text{ou} \quad \Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z} \left\{1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} + \dots\right\} \quad (5)$$

Bien que ci-dessus nous ayons procédé de manière formelle le raisonnement fait peut être justifié rigoureusement.

Autre méthode.

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad F(t) &= -1 - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{(t-1)^4}{4} + \dots = -1 - u^2, \text{ alors} \\ u^2 &= \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

On en déduit par inversion ou en utilisant le fait que $F(t) = \text{Log } t - t$, que

$$\frac{dt}{du} = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} u^2 + \frac{\sqrt{2}}{216} u^4 + \dots$$

Alors de (41) page 275, on déduit

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{z}} z^{z+1} e^{z(\text{Log } 1 - 1)} \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right) \frac{1}{z} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \left(\frac{\sqrt{2}}{216} \right) \frac{1}{z^2} + \dots \right\}$$

$$\text{ou} \quad \Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots \right\}$$

On remarque que de $F''(1) = -1$ on déduit à l'aide de (42), page 275,

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} z^z e^{-z}$$

qui est le premier terme du développement. Dans beaucoup de cas, la connaissance de ce premier terme est suffisante.

FONCTIONS ELLIPTIQUES

37. Montrer que (a) $\frac{d}{dz} \text{sn } z = \text{cn } z \text{ dn } z$, (b) $\frac{d}{dz} \text{cn } z = -\text{sn } z \text{ dn } z$.

Par définition, si $z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, alors $w = \text{sn } z$. On a donc

$$(a) \quad (\text{sn } z) = \frac{dw}{dz} = 1/(dz/dw) = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)} = \text{cn } z \text{ dn } z$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{d}{dz} (\text{cn } z) &= \frac{d}{dz} (1 - \text{sn}^2 z)^{1/2} = \frac{1}{2} (1 - \text{sn}^2 z)^{-1/2} \frac{d}{dz} (-\text{sn}^2 z) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \text{sn}^2 z)^{-1/2} (-2 \text{sn } z)(\text{cn } z \text{ dn } z) = -\text{sn } z \text{ dn } z \end{aligned}$$

38. Montrer que (a) $\text{sn}(-z) = -\text{sn } z$, (b) $\text{cn}(-z) = \text{cn } z$, (c) $\text{dn}(-z) = \text{dn } z$.

$$(a) \quad \text{Si } z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \text{ alors } w = \text{sn } z. \text{ Posons } t = -\tau; \text{ alors}$$

$$z = -\int_0^{-w} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} \quad \text{ou} \quad -z = \int_0^{-w} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

$$\text{i.e. } \text{sn}(-z) = -w = -\text{sn } z$$

$$(b) \quad \text{cn}(-z) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(-z)} = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z} = \text{cn } z$$

$$(c) \quad \text{dn}(-z) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(-z)} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z} = \text{dn } z$$

39. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn} z$, (b) $\operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn} z$.

Nous avons $z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$ d'où $\phi = \operatorname{am} z$ et $\sin \phi = \operatorname{sn} z$, $\cos \phi = \operatorname{cn} z$. De plus

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \int_\pi^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \int_0^\phi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \end{aligned}$$

à l'aide du changement de variable $\theta = \pi + \psi$. On a donc $\phi + \pi = \operatorname{am}(z+2K)$.

On en déduit

$$(a) \operatorname{sn}(z+2K) = \sin \{\operatorname{am}(z+2K)\} = \sin(\phi + \pi) = -\sin \phi = -\operatorname{sn} z$$

$$(b) \operatorname{cn}(z+2K) = \cos \{\operatorname{am}(z+2K)\} = \cos(\phi + \pi) = -\cos \phi = -\operatorname{cn} z$$

40. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(z+4K) = \operatorname{sn} z$, (b) $\operatorname{cn}(z+4K) = \operatorname{cn} z$, (c) $\operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn} z$.

D'après le problème 39

$$(a) \operatorname{sn}(z+4K) = -\operatorname{sn}(z+2K) = \operatorname{sn} z$$

$$(b) \operatorname{cn}(z+4K) = -\operatorname{cn}(z+2K) = \operatorname{cn} z$$

$$(c) \operatorname{dn}(z+2K) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2(z+2K)}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 z}} = \operatorname{dn} z$$

Autre méthode. La fonction à intégrer $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$ a pour points de branchement $t = \pm 1$ et

$t = \pm 1/k$ dans le plan de la variable t [figure 10-10]. Considérons l'intégrale de 0 à w le long des chemins C_1 et C_2 . Nous pouvons déformer C_2 en $ABDEFGHJA + C_1$, où BDE et GHJ sont des cercles de rayon E cependant que JAB et EFG séparés pour plus de commodité dans la figure 10-11, coïncident avec l'axe des x .

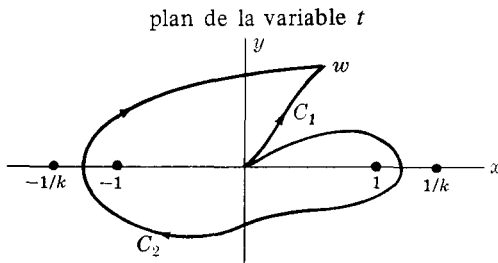


Fig. 10-10

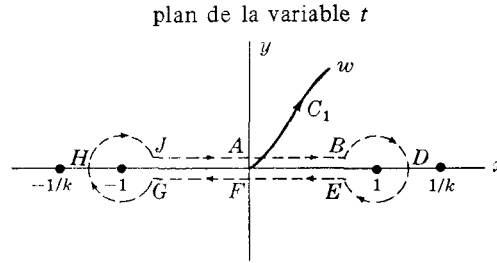


Fig. 10-11

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{C_2}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \int_{BDE} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &\quad + \int_{1-\epsilon}^0 \frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \int_0^{-1-\epsilon} \frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \\ &\quad + \int_{GHJ} \frac{dt}{-\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} + \int_{-1+\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \\ &\quad + \int_{C_1}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &= 4 \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \int_{C_1}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &\quad + \int_{BDE} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} + \int_{GHJ} \frac{dt}{-\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que le radical change de signe lorsque l'on fait le tour d'un point de branchement.

Sur BDE et CHJ on a $t = 1 - \epsilon e^{i\theta}$ et $t = -1 + \epsilon e^{i\theta}$ respectivement. Les intégrales correspondantes ont donc pour valeur

$$\int_0^{2\pi} \frac{-i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\sqrt{(2 - \epsilon e^{i\theta})(\epsilon e^{i\theta})\{1 - k^2(1 - \epsilon e^{i\theta})^2\}}} = -i\sqrt{\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta/2} d\theta}{\sqrt{(2 - \epsilon e^{i\theta})\{1 - k^2(1 - \epsilon e^{i\theta})^2\}}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\sqrt{(\epsilon e^{i\theta})(2 - \epsilon e^{i\theta})\{1 - k^2(-1 + \epsilon e^{i\theta})^2\}}} = i\sqrt{\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta/2} d\theta}{\sqrt{(2 - \epsilon e^{i\theta})\{1 - k^2(-1 + \epsilon e^{i\theta})^2\}}}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, ces intégrales tendent vers zéro et l'on obtient

$$\int_{C_2}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_{C_1}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

D'autre part si l'on considère $z = \int_{C_1}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, i.e. $w = \operatorname{sn} z$

alors $z + 4K = \int_{C_2}^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, i.e. $w = \operatorname{sn}(z + 4K)$

et puisque la valeur de w est la même dans les deux cas, sur $(z + 4K) = \operatorname{sn} z$.

On peut établir les autres résultats de la même façon.

41. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$, (b) $\operatorname{cn}(K + iK') = -ik'/k$, (c) $\operatorname{dn}(K + iK') = 0$.

(a) On a $K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$, où $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Posons $u = 1/\sqrt{1-k'^2t^2}$. Quand $t = 0$, $u = 1$; quand $t = 1$, $u = 1/k$. Quand t varie de 0 à 1, u varie de 1 à $1/k$. D'après le problème 43, page 56, avec $p = 1/k$, on en déduit que $\sqrt{1-t^2} = -ik'u/\sqrt{1-k'^2u^2}$. On a donc par substitution.

$$K' = -i \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$\text{d'où } K + iK' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \int_1^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{1/k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

i.e. $\operatorname{sn}(K + iK') = 1/k$.

(b) D'après (a),

$$\operatorname{cn}(K + iK') = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K + iK')} = \sqrt{1 - 1/k^2} = -i\sqrt{1-k^2}/k = -ik'/k$$

(c) $\operatorname{dn}(K + iK') = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K + iK')} = 0$ d'après (a).

42. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(2K + 2iK') = 0$, (b) $\operatorname{cn}(2K + 2iK') = 1$, (c) $\operatorname{dn}(2K + 2iK') = -1$.

On a d'après les formules d'addition écrites avec $z_1 = z_2 = K + iK'$,

$$(a) \quad \operatorname{sn}(2K + 2iK') = \frac{2 \operatorname{sn}(K + iK') \operatorname{cn}(K + iK') \operatorname{dn}(K + iK')}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4(K + iK')} = 0$$

$$(b) \quad \operatorname{cn}(2K + 2iK') = \frac{\operatorname{cn}^2(K + iK') - \operatorname{sn}^2(K + iK') \operatorname{dn}^2(K + iK')}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4(K + iK')} = 1$$

$$(c) \quad \operatorname{dn}(2K + 2iK') = \frac{\operatorname{dn}^2(K + iK') - k^2 \operatorname{sn}^2(K + iK') \operatorname{cn}^2(K + iK')}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4(K + iK')} = -1$$

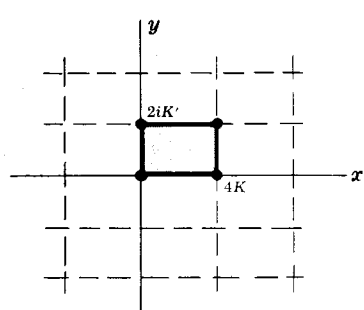
43. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(z + 2iK') = \operatorname{sn} z$, (b) $\operatorname{cn}(z + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} z$, (c) $\operatorname{dn}(z + 4iK') = \operatorname{dn} z$.

On obtient à l'aide des problèmes 39, 42, 170 et des formules d'addition, les relations suivantes

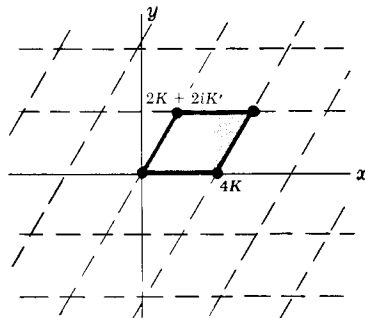
$$\begin{aligned}
(a) \quad \operatorname{sn}(z + 2iK') &= \operatorname{sn}(z - 2K + 2K + 2iK') \\
&= \frac{\operatorname{sn}(z - 2K) \operatorname{cn}(2K + 2iK') \operatorname{dn}(2K + 2iK') + \operatorname{sn}(2K + 2iK') \operatorname{cn}(z - 2K) \operatorname{dn}(z - 2K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z - 2K) \operatorname{sn}^2(2K + 2iK')} \\
&= \operatorname{sn} z \\
(b) \quad \operatorname{cn}(z + 2K + 2iK') &= \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn}(2K + 2iK') - \operatorname{sn} z \operatorname{sn}(2K + 2iK') \operatorname{dn} z \operatorname{dn}(2K + 2iK')}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2(2K + 2iK')} \\
&= \operatorname{cn} z \\
(c) \quad \operatorname{dn}(z + 4iK') &= \operatorname{dn}(z - 4K + 4K + 4iK') \\
&= \frac{\operatorname{dn}(z - 4K) \operatorname{dn}(4K + 4iK') - k^2 \operatorname{sn}(z - 4K) \operatorname{sn}(4K + 4iK') \operatorname{cn}(z - 4K) \operatorname{cn}(4K + 4iK')}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z - 4K) \operatorname{sn}^2(4K + 4iK')} \\
&= \operatorname{dn} z
\end{aligned}$$

44. Construire les parallélogrammes des périodes pour les fonctions (a) $\operatorname{sn} z$, (b), $\operatorname{cn} z$, (c) $\operatorname{dn} z$.

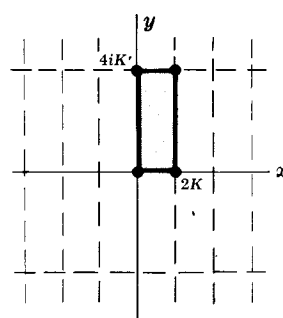
Les résultats ont été représentés dans les figures 10-12, 10-13 et 10-14.



Parallélogramme des périodes
pour $\operatorname{sn} z$
Fig. 10-12



Parallélogramme des périodes
pour $\operatorname{cn} z$
Fig. 10-13



Parallélogramme des périodes
pour $\operatorname{dn} z$
Fig. 10-14

PROBLEMES DIVERS

45. Montrer que $P_n(z) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Les polynômes de Legendre $P_n(z)$ sont de degré n et prennent la valeur 1 pour $z = 1$. On voit alors d'après (29) page 273 que

$$F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right) = 1 - \frac{n(n+1)}{2}(1-z) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{16}(1-z)^2 + \dots$$

est un polynôme de degré n prenant la valeur 1 pour $z = 1$.

On aura démontré le résultat cherché si l'on prouve que P_n et F vérifient la même équation différentielle.

Pour cela posons $\frac{1-z}{2} = u$, i.e. $z = 1 - 2u$ dans l'équation de Legendre (25) page 272, on obtient

$$u(1-u) \frac{d^2 Y}{du^2} + (1-2u) \frac{dY}{du} + n(n+1)Y = 0$$

Cette équation n'est autre que l'équation hypergéométrique (30) page 273, avec $a = -n$, $b = n+1$, $c = 1$ et $u = (1-z)/2$. Le résultat est donc démontré.

46. Montrer que $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \Gamma\left(\frac{3}{m}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{m}}$$

Nous avons

$$P = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$

On obtient alors par multiplication terme à terme et à l'aide des problèmes 13 et 52 page 25

$$\begin{aligned} P^2 &= \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \right\} \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right) \right\} \cdots \left\{ \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi/m)} \cdot \frac{\pi}{\sin(2\pi/m)} \cdots \frac{\pi}{\sin(m-1)\pi/m} \\ &= \frac{\pi^{m-1}}{\sin(\pi/m) \sin(2\pi/m) \cdots \sin(m-1)\pi/m} = \frac{\pi^{m-1}}{m/2^{m-1}} = \frac{(2\pi)^{m-1}}{m} \end{aligned}$$

Soit $P = (2\pi)^{(m-1)/2} / \sqrt{m}$.

47. Montrer que pour de grandes valeurs de z ,

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

D'après le problème 33, chapitre 6, nous avons

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - z \sin t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-int} e^{iz \sin t} dt \right\}$$

Soit $F(t) = i \sin t$, alors $F'(t) = i \cos t = 0$ pour $t = \pi/2$. Si l'on pose $t = \pi/2 + v$, la deuxième intégrale devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in(\pi/2+v)} e^{iz \sin(\pi/2+v)} dv &= \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{iz \cos v} dv \\ &= \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{iz(1-v^2/2+v^4/24-\dots)} dv \\ &= \frac{e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv} e^{-izv^2/2+izv^4/24-\dots} dv \end{aligned}$$

Soit $v^2 = -2iu^2/z$ ou $v = (1-i)u/\sqrt{z}$, i.e. $u = \frac{1}{2}(1+i)\sqrt{z}v$. L'intégrale peut alors être approchée par

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+i)nu/\sqrt{z}} e^{-u^2 - iu^4/6z - \dots} du$$

ou pour de grandes valeurs positives de z

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\sqrt{\pi z}}$$

et la partie réelle est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

On peut également obtenir les termes complémentaires du développement [voir problème 162].

48. Si C désigne le contour de la figure 10-15 montrer que pour toutes les valeurs de z

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \oint_C t^{z-1} e^{-t} dt$$

Si l'on se reporte à la figure 10-15 ci-après on voit que sur AB , $t = x$; sur BDE , $t = \epsilon e^{i\theta}$ et sur EF , $t = x e^{2\pi i}$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{ABDEF} t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_R^\epsilon x^{z-1} e^{-x} dx + \int_0^{2\pi} (\epsilon e^{i\theta})^{z-1} e^{-\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &\quad + \int_\epsilon^R x^{z-1} e^{2\pi i(z-1)} e^{-x} dx \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \int_\epsilon^R x^{z-1} e^{-x} dx + i \int_0^{2\pi} \epsilon^z e^{i\theta z} e^{-\epsilon e^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, on a quand même $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt &= (e^{2\pi iz} - 1) \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \Gamma(z) \end{aligned}$$

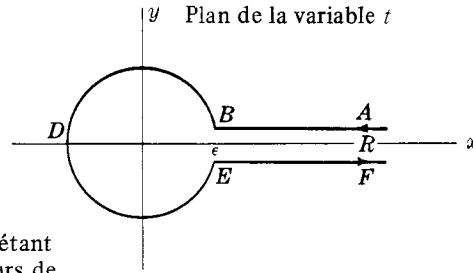


Fig. 10-15

D'autre part les fonctions qui figurent dans les deux membres étant analytiques pour tout z , on en déduit que pour toutes les valeurs de z ,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \oint_C t^{z-1} e^{-t} dt$$

49. Montrer que $\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}$.

Posons $z_1 + z_2 = \alpha = \text{constante}$. On a alors $dz_2/dz_1 = -1$. On pose également $U = \operatorname{sn} z_1$, $V = \operatorname{sn} z_2$. On en déduit que

$$\frac{dU}{dz_1} = \dot{U} = \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1, \quad \frac{dV}{dz_1} = \dot{V} = \frac{dV}{dz_2} \frac{dz_2}{dz_1} = -\operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2$$

où le point indique une dérivation par rapport à z_1 . On a alors

$$\dot{U}^2 = (1 - U^2)(1 - k^2 U^2) \quad \text{et} \quad \dot{V}^2 = (1 - V^2)(1 - k^2 V^2)$$

On trouve après dérivation et simplification

$$(1) \quad \ddot{U} = 2k^2 U^3 - (1 + k^2)U, \quad (2) \quad \ddot{V} = 2k^2 V^3 - (1 + k^2)V$$

En multipliant (1) par V , (2) par U on obtient après soustraction

$$\ddot{U}V - U\ddot{V} = 2k^2 UV(U^2 - V^2) \quad (3)$$

$$\text{On vérifie aisément que} \quad \dot{U}^2 V^2 - U^2 \dot{V}^2 = (1 - k^2 U^2 V^2)(V^2 - U^2) \quad (4)$$

$$\text{ou} \quad \dot{U}V - U\dot{V} = \frac{(1 - k^2 U^2 V^2)(V^2 - U^2)}{\dot{U}V + U\dot{V}} \quad (5)$$

Par division de (3) par (5), il vient

$$\frac{\ddot{U}V - U\ddot{V}}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{-2k^2 UV(\dot{U}V + U\dot{V})}{1 - k^2 U^2 V^2} \quad (6)$$

Mais $\ddot{U}V - U\ddot{V} = \frac{d}{dz_1}(\dot{U}V - U\dot{V})$ et $-2k^2 UV(\dot{U}V + U\dot{V}) = \frac{d}{dz_1}(1 - k^2 U^2 V^2)$, si bien que (6) devient :

$$\frac{d(\dot{U}V - U\dot{V})}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{d(1 - k^2 U^2 V^2)}{1 - k^2 U^2 V^2}$$

Soit par intégration $\frac{\dot{U}V - U\dot{V}}{1 - k^2 U^2 V^2} = c$ (une constante) i.e.

$$\frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} = c$$

est solution de l'équation différentielle. Il est également évident que $z_1 + z_2 = \alpha$ est une solution. On a donc entre ces deux solutions la relation

$$\frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{cn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2} = F(z_1 + z_2)$$

Pour $z_2 = 0$, on voit que $F(z_1) = \operatorname{sn} z_1$. On a donc $F(z_1 + z_2) = \operatorname{sn}(z_1 + z_2)$ ce qui établit le résultat.

Problèmes supplémentaires

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

50. (a) Montrer que $F_1(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots$ converge pour $|z| < 1$.
- (b) Montrer que $F_2(z) = \frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}\text{Log } 2 + \left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^3 + \dots$ converge pour $|z-i| < \sqrt{2}$.
- (c) Montrer que $F_1(z)$ et $F_2(z)$ sont des prolongements analytiques l'une de l'autre;
- (d) Pouvez-vous trouver une fonction représentant tous les prolongements analytiques possibles de $F_1(z)$? Justifier la réponse.
- Rép. (d) $-\log(1-z)$.
51. Une fonction $F(z)$ est représentée dans $|z-1| < 2$ par la série
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{2n}}{2^{2n+1}}$$
- Montrer que la valeur de la fonction en $z=5$ est $1/16$.
52. (a) Montrer que $F_1(z) = \int_0^{\infty} (1+t)e^{-zt} dt$ converge seulement pour $\text{Re}\{z\} > 0$.
- (b) Déterminer une fonction qui soit le prolongement analytique de $F_1(z)$ dans le demi-plan de gauche.
- Rép. (b) $(z+1)/z^2$.
53. (a) Déterminer le domaine de convergence de $F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-(z+1)^2 t} dt$ représenter graphiquement la région obtenue.
- (b) Trouver la valeur du prolongement analytique de $F_1(z)$ en $z = 2 - 4i$.
- Rép. (a) $\text{Re}\{z+1\}^2 > 0$, (b) $(-7+24i)/625$
54. (a) Montrer que $\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^4}{1-z^8} + \dots = \begin{cases} z/(1-z) & \text{si } |z| < 1 \\ 1/(1-z) & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$
- (b) Etudier ces résultats du point de vue du prolongement analytique.
55. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ ne peut être prolongée analytiquement au-delà du cercle $|z| = 1$.
56. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\beta_n}$ a $|z| = 1$ comme coupure peut-on conclure que $|z| = 1$ est également une coupure pour $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n z^{\beta_n}$? Justifier votre conclusion.
57. Soit $\{z_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, on suppose que pour tout n , $z_n \neq a$. Soit $F(z)$ et $G(z)$ deux fonctions analytiques en a et telles que $F(z_n) = G(z_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- (a) Montrer que $F(z) = G(z)$. (b) Quel rapprochement peut-on faire entre le résultat de (a) et le prolongement analytique?
- [On pourra étudier le développement de $F(z) - G(z)$ en série de Taylor dans le voisinage de $z = a$].

PRINCIPE DE SYMETRIE DE SCHWARZ

58. Résoudre le problème 2 à l'aide du principe de symétrie de Schwarz.
59. (a) En supposant que $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ est valable pour toutes les valeurs réelles de z , montrer que cette formule est aussi valable pour les valeurs complexes de z .
- (b) Peut-on utiliser le principe de symétrie de Schwarz pour démontrer que $\text{tg } 2z = 2 \text{tg } z / (1 - \text{tg}^2 z)$?
60. Le principe de symétrie de Schwarz s'applique-t-il si l'on remplace l'axe des x par l'axe des y ? Justifier la réponse.
61. Peut-on étendre le principe de symétrie de Schwarz à une symétrie par rapport à une courbe C ?

PRODUITS INFINIS

62. Etudier la convergence des produits infinis

$$(a) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right), \quad (b) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right), \quad (c) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\cos k\pi}{k^2+1}\right)$$

Rép. (a) conv., (b) div., (c) conv.

63. Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + w_k)$ converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

64. Etudier la convergence de (a) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, (b) $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$, (c) $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \operatorname{arccotg} k^2)$.

Rép. (a) div., (b) div., (c) conv.

65. Si un produit infini est absolument convergent montrer qu'il est convergent.

66. Montrer que $\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

67. Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{e^{-kz}}{k^2}\right)$ (a) converge absolument et uniformément dans le demi-plan de droite $\operatorname{Re}\{z\} \geq 0$ et (b) représente une fonction analytique de z pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$.

68. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots = \frac{1}{2}$.

69. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots = \frac{1}{2}$.

70. Montrer que (a) $\operatorname{sh} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$
(b) $\operatorname{ch} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

71. Utiliser les produits infinis pour montrer que $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, justifier les calculs.

72. Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \sin \frac{z}{k}\right)$ (a) converge absolument et uniformément pour tout z et (b) représente une fonction analytique.

73. Montrer que $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$ converge.

LA FONCTION GAMMA

74. Evaluer chacune des intégrales suivantes au moyen de la fonction gamma.

$$(a) \int_0^{\infty} y^3 e^{-2y} dy \quad (c) \int_0^{\infty} y^2 e^{-2y^2} dy \quad (e) \int_0^{\infty} \{ye^{-y^2}\}^{1/4} dy$$

$$(b) \int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-3u} du \quad (d) \int_0^1 \{\operatorname{Log}(1/t)\}^{-1/2} dt$$

Rép. (a) $3/8$, (b) $\sqrt{3\pi}/36$, (c) $\sqrt{2\pi}/16$, (d) $\sqrt{\pi}$, (e) $\Gamma(5/8)/\sqrt[4]{2}$

75. Montrer que $\Gamma(z) = \int_0^1 \{\operatorname{Log}(1/t)\}^{z-1} dt$ pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$.

76. Montrer que $\int_1^{\infty} \frac{(x-1)^p}{x^2} dx = \Gamma(1+p) \Gamma(1-p)$, $-1 < p < 1$.

77. Si m , n et a sont des constantes positives, montrer que

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{n} a^{-(m+1)/n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

78. Montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$ si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$.

79. Calculer $\int_0^1 (x \operatorname{Log} x)^4 dx$. Rép. 24/3125

80. Evaluer (a) $\Gamma(-7/2)$, (b) $\Gamma(-1/3)$. Rép. (a) $16\sqrt{\pi}/105$, (b) $-3\Gamma(2/3)$

81. Montrer que $\Gamma(-\frac{1}{2} - m) = \frac{(-1)^{m+1} \sqrt{\pi} 2^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

82. Montrer que le résidu de $\Gamma(z)$ en $z = -m$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, est $(-1)^m/m!$ avec $0! = 1$ par définition.

83. Utiliser la représentation de la fonction gamma sous forme de produit infini pour montrer que

(a) $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

(b) $2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$

84. Montrer que si $y > 0$, $|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{\pi \operatorname{sh} \pi y}}$.

85. Que devient le problème 84 si $y < 0$?

86. Démontrer (a) la propriété 6, (b) la propriété 7, (c) la propriété 9 des pages 268 et 269.

87. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{5}) \Gamma(\frac{2}{5}) = 4\pi^2/\sqrt{5}$.

88. (a) A l'aide de la représentation de la fonction gamma sous forme de produit infini, montrer que pour tout entier positif m

$$\frac{m^{mz} \Gamma(z) \Gamma(z+1/m) \Gamma(z+2/m) \cdots \Gamma(z+[m-1]/m)}{\Gamma(mz)}$$

est une constante indépendante de z .

(b) En faisant tendre z vers zéro dans le résultat de (a), évaluer cette constante et en déduire la propriété 5 page 268.

LA FONCTION BETA

89. Evaluer (a) $B(3, 5/2)$, (b) $B(1/3, 2/3)$. Rép. (a) $16/315$, (b) $2\pi/\sqrt{3}$

90. Evaluer chacune des intégrales suivantes en utilisant la fonction bêta.

(a) $\int_0^1 t^{-1/3} (1-t)^{2/3} dt$, (b) $\int_0^1 u^2 (1-u^2)^{-1/2} du$, (c) $\int_0^3 (9-t^2)^{3/2} dt$, (d) $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{4t-t^2}}$.

Rép. (a) $4\pi/3\sqrt{3}$, (b) $\pi/4$, (c) $243\pi/16$, (d) π

91. Montrer que $\frac{B(m+1, n)}{B(m, n+1)} = \frac{m}{n}$.

92. Si $a > 0$, montrer que $\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4 - y^4}} = \frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4a\sqrt{2\pi}}$.

93. Montrer que $\frac{B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)} = 2^p$ moyennant des hypothèses convenables sur p

94. Calculer (a) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^4 \theta d\theta$, (b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} \theta} d\theta$. Rép. (a) $3\pi/512$, (b) $\pi/\sqrt{2}$

95. Montrer que $B(m, n) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ avec $\operatorname{Re}\{m\} > 0$ et $\operatorname{Re}\{n\} > 0$.

[On pourra poser $y = x/(1+x)$]

96. Montrer que $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

97. (a) Montrer que si l'un ou l'autre de m ou n (mais non les deux) est un entier négatif et si $m+n < 0$, alors $B(m, n)$ est infini. (b) Etudier $B(m, n)$ quand à la fois m et n sont des entiers négatifs.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

98. Déterminer les points singuliers des équations différentielles suivantes et indiquer s'ils sont réguliers ou irréguliers.

(a) $(1-z^2)Y'' - 2Y' + 6Y = 0$

(b) $(2z^4 - z^5)Y'' + zY' + (z^2 + 1)Y = 0$ (c) $z^2(1-z)^2 Y'' + (2-z)Y' + 4z^2 Y = 0$.

Rép. (a) $z = \pm 1$, réguliers. (b) $z = 2$ régulier, $z = 0$ irrégulier. (c) $z = 0, 1$, irréguliers.

99. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes à l'aide de séries entières, déterminer le rayon de convergence de chaque série obtenue. Si possible calculer la somme des séries obtenues et vérifier que la somme vérifie bien l'équation différentielle.

(a) $Y'' + 2Y' + Y = 0$, (b) $Y'' + zY = 0$, (c) $zY'' + 2Y' + zY = 0$.

Rép. (a) $Y = Ae^{-z} + Bze^{-z}$

(b) $Y = A \left(1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} z^9 + \dots \right) + B \left(z - \frac{2z^4}{4!} + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} z^{10} + \dots \right)$

(c) $Y = \frac{A \sin z + B \cos z}{z}$

100. (a) Si l'on cherche une solution de $(1-z^2)Y'' + 2Y = 0$, sous la forme $Y = \sum a_n z^n$, quel rayon de convergence faut-il s'attendre à trouver ? Expliquer.

(b) Vérifier si la valeur attendue en (a) est correcte en déterminant effectivement la série solution.

Rép. (b) $Y = A(1-z^2) + B \left(z - \frac{z^3}{1 \cdot 3} - \frac{z^5}{3 \cdot 5} - \frac{z^7}{5 \cdot 7} - \dots \right)$

101. (a) Résoudre $Y'' + z^2 Y = 0$ avec les conditions initiales $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -1$ et (b) déterminer le domaine de convergence.

(a) $Y = 1 - z - \frac{z^4}{3 \cdot 4} + \frac{z^5}{4 \cdot 5} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{z^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \dots$ (b) $|z| < \infty$

102. Si $Y = Y_1(z)$ est une solution de $Y'' + p(z)Y' + q(z)Y = 0$ montrer que la solution générale est

$$Y = A Y_1(z) + B Y_1(z) \int \frac{e^{-\int p(z) dz}}{\{Y_1(z)\}^2} dz$$

103. (a) Résoudre $zY'' + (1-z)Y' - Y = 0$ et (b) déterminer le domaine de convergence.

(a) $Y = (A+B \operatorname{Log} z)e^z - B \left\{ z + \frac{z^2}{2!} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{z^3}{3!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right\}$ (b) $|z| > 0$

104. (a) Utiliser le problème 102 pour montrer que la solution de l'équation différentielle du problème 103 peut-être écrite sous la forme

$$Y = Ae^z + Be^z \int \frac{e^{-z}}{z} dz$$

(b) Rapprocher le résultat de (a) de la série solution obtenue au problème 103.

105. (a) Résoudre $zY'' + Y' - Y = 0$ et (b) déterminer le domaine de convergence.

Rép. (a) $Y = (A+B \operatorname{Log} z) \left\{ \frac{z}{(1!)^2} + \frac{z^2}{(2!)^2} + \frac{z^3}{(3!)^2} + \dots \right\} - 2B \left\{ \frac{z}{(1!)^2} + \frac{z^2}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{z^3}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right\}$

106. Montrer que $Y = V e^{-1/2 \int p(z) dz}$ transforme l'équation différentielle $Y'' + p(z) Y' + q(z) Y = 0$ en

$$V'' + \{q(z) - \frac{1}{2}p'(z) - \frac{1}{4}[p(z)]^2\}V = 0$$

107. Utiliser la méthode du problème 106 pour trouver la solution générale de $zY'' + 2Y' + zY = 0$ [voir Problème 99 (c)].

SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES SOUS FORME INTEGRALE

108. Utiliser cette méthode pour résoudre chacune des équations suivantes.

$$(a) Y'' - Y' - 2Y = 0, \quad (b) Y'' + 4Y' + 4Y = 0, \quad (c) Y'' + 2Y' + 2Y = 0.$$

$$\text{Rép. (a) } Y = Ae^{2z} + Be^{-z}, \quad (b) Y = Ae^{-2z} + Bze^{-2z}, \quad (c) Y = e^{-z}(A \sin z + B \cos z).$$

109. Montrer qu'une solution de $zY'' + (a-z)Y' - bY = 0$, où $\operatorname{Re}\{a\} > 0$, $\operatorname{Re}\{b\} > 0$, est donnée par

$$Y = \int_0^1 e^{zt} t^{b-1} (1-t)^{a-b-1} dt$$

FONCTIONS DE BESSEL

110. Montrer que $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

111. Montrer que (a) $\frac{d}{dz} \{z^n J_n(z)\} = z^n J_{n-1}(z)$, (b) $\frac{d}{dz} \{z^{-n} J_n(z)\} = -z^{-n} J_{n+1}(z)$.

112. Montrer que (a) $J'_0(z) = -J_1(z)$, (b) $\int z^3 J_2(z) dz = z^3 J_3(z) + c$, (c) $\int z^3 J_0(z) dz = z^3 J_1(z) - 2z^2 J_2(z) + c$.

113. Montrer que (a) $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z$, (b) $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \cos z$.

114. Etendre le résultat du problème 27 aux valeurs non entières de n .

115. Montrer que $J_{3/2}(z) \sin z - J_{-3/2} \cos z = \sqrt{2/\pi z^3}$.

116. Montrer que $J'_n(z) = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\}$.

117. Montrer que (a) $J''_n(z) = \frac{1}{4}\{J_{n-2}(z) - 2J_n(z) + J_{n+2}(z)\}$

$$(b) J'''_n(z) = \frac{1}{8}\{J_{n-3}(z) - 3J_{n-1}(z) + 3J_{n+1}(z) - J_{n+3}(z)\}.$$

118. Généraliser les résultats des problèmes 116 et 117.

119. Vérifier par substitution que $J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) d\theta$ est solution de

$$zY'' + Y' + zY = 0$$

120. Si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, montrer que $\int_0^\infty e^{-zt} J_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$.

121. Montrer que (a) $\cos(\alpha \cos \theta) = J_0(\alpha) - 2J_2(\alpha) \cos 2\theta + 2J_4(\alpha) \cos 4\theta - \dots$

$$(b) \sin(\alpha \cos \theta) = 2J_1(\alpha) \cos \theta - 2J_3(\alpha) \cos 3\theta + 2J_5(\alpha) \cos 5\theta - \dots$$

122. Si p est un entier, démontrer que

$$J_p(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_{p-n}(y)$$

[On pourra utiliser la fonction génératrice]

123. Etablir la propriété 8, page 271.

124. Si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$, montrer que $J_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \oint_C e^{\frac{1}{2}(t-z^2/t)} t^{-n-1} dt$ où C est le contour de la figure 10-5, Page 268.

125. Si $\operatorname{Re}\{z\} > 0$ montrer que

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi - \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-n\phi - z \operatorname{sh} \phi} d\phi$$

126. (a) Vérifier que $Y_0(z)$, donné par l'équation (23) de la page 272 est solution de l'équation de Bessel d'ordre zéro. (b) Vérifier que $Y_n(z)$ donné par l'équation (22), page 271, est solution de l'équation de Bessel d'ordre n .

127. Montrer que : (a) $z Y_{n-1}(z) - 2n Y_n(z) + z Y_{n+1}(z) = 0$

$$(b) \frac{d}{dz} \{z^n Y_n(z)\} = z^n Y_{n-1}(z) \quad (c) \frac{d}{dz} \{z^{-n} Y_n(z)\} = -z^{-n} Y_{n+1}(z).$$

128. Montrer que la solution générale de

$$V'' + \left\{1 - \frac{(n^2 - 1/4)}{z^2}\right\} V = 0$$

est $V = \sqrt{z} \{A J_n(z) + B Y_n(z)\}$.

129. Montrer que $J_{n+1}(z) Y_n(z) - J_n(z) Y_{n+1}(z) = 1/z$.

130. Montrer que la solution générale de $V'' + z^{m-2} V = 0$ est

$$V = \sqrt{z} \left\{ A J_{1/m} \left(\frac{2}{m} z^{m/2} \right) + B Y_{1/m} \left(\frac{2}{m} z^{m/2} \right) \right\}$$

131. (a) Montrer que la solution générale de l'équation de Bessel $z^2 Y'' + z Y' + (z^2 - n^2) Y = 0$ est

$$Y = A J_n(z) + B J_n(z) \int \frac{dz}{z J_n^2(z)}$$

(b) Comparer ce résultat avec l'équation (24) page 272.

FONCTIONS DE LEGENDRE

132. Donner l'expression des polynômes de Legendre (a) $P_3(z)$, (b) $P_4(z)$, (c) $P_5(z)$

$$(a) \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), (b) \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), (c) \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$$

133. Montrer que (a) $P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z) = (2n+1) P_n(z)$, (b) $(n+1) P_n(z) = P'_{n+1}(z) - z P'_n(z)$.

134. Montrer que $n P'_{n-1}(z) - (2n+1) z P'_n(z) + (n+1) P'_{n-1}(z) = 0$.

135. Montrer que (a) $P_n(-1) = (-1)^n$, (b) $P_{2n+1}(0) = 0$.

136. Montrer que $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$.

137. Vérifier la propriété 2, page 272.

138. Si $[n/2]$ désigne le plus grand entier $\leq n/2$, montrer que

$$P_n'(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} z^{n-2k}$$

139. Montrer que la solution générale de l'équation de Legendre $(1-z^2) Y'' - 2z Y' + n(n+1) Y = 0$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ est

$$Y = A P_n(z) + B Q_n(z) \quad \text{où} \quad Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1) \{P_n(t)\}^2}$$

140. Utiliser le problème 139 pour déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(1-z^2) Y'' - 2z Y' + 2Y = 0$.

$$\text{Rép. } Y = Az + B \left\{ 1 + \frac{1}{2} z \operatorname{Log} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right\}$$

LA FONCTION BETA

141. Montrer que pour $\operatorname{Re}\{z\} > 0$

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1} dt}{e^t - 1}$$

142. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\dots = \frac{\pi^2}{6}$ où 2, 3, 5, 7, ... représentent les nombres premiers.

143. Montrer que la seule singularité de $\zeta(z)$ est un pôle simple en $z = 1$, dont le résidu est 1.

144. Utiliser le prolongement analytique de $\zeta(z)$ donné par l'équation (33) page 273, pour montrer que
(a) $\zeta(-1) = -1/12$, (b) $\zeta(-3) = 1/120$.

145. Montrer que si l'on remplace z par $1 - z$, l'équation (33) page 273 est invariante.

LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE

146. Montrer que (a) $\operatorname{Log}(1+z) = z F(1, 1; 2; -z)$

$$(b) \frac{\operatorname{arctg} z}{z} = F(1/2, 1; 3/2; -z^2).$$

147. Montrer que $\cos 2az = F(\alpha, -\alpha; 1/2; \sin^2 z)$.

148. Montrer que $\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z)$.

149. Si $\operatorname{Re}\{c-a-b\} > 0$ et $c \neq 0, -1, -2, \dots$, montrer que

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$$

150. Démontrer le résultat (31) page 273.

151. Montrer que (a) $F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z)$

$$(b) F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b; c; z/[z-1]).$$

152. Montrer que pour $|z-1| < 1$, l'équation $z(1-z)Y'' + \{c - (a+b+1)z\}Y' - abY = 0$ admet la solution $F(a, b; a+b-c+1; 1-z)$.

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

153. Montrer que

$$\int_p^\infty e^{-zt^2} dt = \frac{e^{-zp^2}}{2pz} \left\{ 1 - \frac{1}{2p^2z} + \frac{1 \cdot 3}{(2p^2z)^2} - \dots (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2p^2z)^n} \right\} \\ \cdot (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(2z)^{n+1}} \int_p^\infty \frac{e^{-zt^2}}{t^{2n+2}} dt$$

et en déduire le développement asymptotique de l'intégrale du premier membre.

154. Utiliser le problème 153 pour vérifier le résultat (48) de la page 275.

155. Evaluer 50 ! *Rép.* $3,04 \times 10^{64}$

156. Montrer que pour de grandes valeurs de n , $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

157. Etablir les développements asymptotiques suivants

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \left\{ 1 - \frac{1}{2z} + \frac{1 \cdot 3}{(2z)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^3} + \dots \right\}$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} dt \sim \frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \dots$$

158. Vérifier la validité du développement asymptotique (49) de la page 275.

159. Utiliser un développement asymptotique pour obtenir une valeur approximative de $\int_{10}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.
Rép. 0,915, approx.

160. Montrer que sous des conditions convenables pour $F(t)$,

$$\int_0^\infty e^{-zt} F(t) dt \sim \frac{F(0)}{z} + \frac{F'(0)}{z^2} + \frac{F''(0)}{z^3} + \dots$$

161. Préciser les étapes du raisonnement permettant de passer de (4) à (5) dans le problème 36.

162. Démontrer le résultat (46) page 275, qui donne le développement asymptotique de fonctions de Bessel.

163. Si $F(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^n}$ et $G(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{b_n}{z^n}$, montrer que :

$$(a) F(z) + G(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n + b_n}{z^n}$$

$$(b) F(z) G(z) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{z^n} \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

164. Si $F(z) \sim \sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{z^n}$, montrer que $\int_z^\infty F(z) dz \sim \sum_{n=2}^\infty \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}}$.

165. Montrer que pour de grandes valeurs de z ,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^z} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \frac{1}{z^{1/2}} + \frac{3}{8z^{3/2}} + \frac{25}{128z^{5/2}} + \dots \right\}$$

FONCTIONS ELLIPTIQUES

166. Si $0 < k < 1$, montrer que

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right\}$$

167. Montrer que (a) $\operatorname{sn} 2z = \frac{2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 z}$, (b) $\operatorname{cn} 2z = \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^4 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 z}$.

168. Si $k = \sqrt{3}/2$, montrer que (a) $\operatorname{sn}(K/2) = \sqrt{2/3}$, (b) $\operatorname{cn}(K/2) = \sqrt{1/3}$, (c) $\operatorname{dn}(K/2) = \sqrt{1/2}$.

169. Montrer que $\frac{\operatorname{sn} A + \operatorname{sn} B}{\operatorname{cn} A + \operatorname{cn} B} = \operatorname{tn} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{dn} \frac{1}{2}(A-B)$.

170. Montrer que (a) $\operatorname{sn}(4K + 4iK') = 0$, (b) $\operatorname{cn}(4K + 4iK') = 1$, (c) $\operatorname{dn}(4K + 4iK') = 1$.

171. Montrer que (a) $\operatorname{sn} z = z - \frac{1}{8}(1+k^2)z^3 + \frac{1}{120}(1+14k+k^4)z^5 + \dots$

$$(b) \operatorname{cn} z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}(1+4k^2)z^4 + \dots$$

$$(c) \operatorname{dn} z = 1 - \frac{1}{2}k^2 z^2 + \frac{1}{24}k^2(k^2+4)z^4 + \dots$$

172. Montrer que $\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

173. Démontrer les résultats (b) et (c) du problème 40 à l'aide d'une intégrale d'une fonction de la variable complexe prise le long de contours convenables.

174. (a) Montrer que $\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi_1}}$ où $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$ en utilisant la

transformation de Landen, $\operatorname{tg} \phi = (\sin 2\phi_1)/(k + \cos 2\phi_1)$.

(b) Si $0 < k < 1$, montrer que $k < k_1 < 1$.

(c) Montrer que par applications successives de la transformation de Landen on obtient une suite de modules k_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$. Dans ces conditions montrer que si $\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$,

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \dots}{k}} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \right)$$

(d) Expliquer comment le résultat de (c) peut être utilisé dans l'évaluation des intégrales elliptiques.

175. La fonction $\operatorname{tn} z = (\operatorname{sn} z)/(\operatorname{cn} z)$ est-elle doublement périodique ? Expliquer.

176. Démontrer les formules d'addition pour (a) $\operatorname{cn}(z_1 + z_2)$, (b) $\operatorname{dn}(z_1 + z_2)$, données à la page 276.

PROBLEMES DIVERS

177. Si $|p| < 1$, montrer que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \pi [\cos(p\pi/2)]^{-1}$

178. Si $0 < n < 2$, montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^n} dt = \frac{\pi}{2 \Gamma(n) \sin(n\pi/2)}$.

179. Si $0 < n < 1$, montrer que $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^n} dt = \frac{\pi}{2 \Gamma(n) \cos(n\pi/2)}$

180. Montrer que la solution générale de $(1 - z^2) Y'' - 4zY' + 10Y = 0$ est

$$Y = A F(5/2, -1; 1/2; z^2) + B z F(3, -1/2; 3/2; z^2)$$

181. Montrer que (a) $\int_0^\infty \sin t^3 dt = \frac{1}{3} \Gamma(1/3)$

$$(b) \int_0^\infty \cos t^3 dt = \frac{\sqrt{3}}{6} \Gamma(1/3).$$

182. (a) Déterminer une solution de $zY'' + Y' + zY = 0$ de la forme $(\operatorname{Log} z) \left(\sum_{k=0}^\infty a_k z^k \right)$, et vérifier le résultat (23) de la page 272. (b) Quelle est la solution générale ?

183. Utiliser la méthode du problème 182 pour trouver la solution générale de $z^2 Y'' + zY' + (z^2 - n^2) Y = 0$ [voir l'équation (22), page 271].

184. Montrer que la solution générale de $zU'' + (2m+1)U' + zU = 0$ est

$$U = z^{-m} \{A J_m(z) + B Y_m(z)\}$$

185. (a) Montrer que $z^{1/2} J_1(2iz^{1/2})$ est solution de $zU'' - U = 0$. (b) Quelle est la solution générale ?

$$\text{Rép. (b) } Y = z^{1/2} \{A J_1(2iz^{1/2}) + B Y_1(2iz^{1/2})\}$$

186. Montrer que $\{J_0(z)\}^2 + 2\{J_1(z)\}^2 + 2\{J_2(z)\}^2 + \dots = 1$.

187. Montrer que $e^{z \cos \alpha} J_0(z \sin \alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{P_n(\cos \alpha)}{n!} z^n$.

188. Montrer que $\Gamma'(\frac{1}{2}) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \operatorname{Log} 2)$.

189. (a) Montrer que $\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \operatorname{Log} z + z - \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} - \dots$

(b) Le résultat de (a) peut-il être utilisé pour calculer $\int_{10}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$? Expliquer. [Comparer avec le problème 159].

190. Si m est un entier positif, montrer que $F(\frac{1}{2}, -m; \frac{1}{2} - m; 1) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}$.

191. Montrer que $(1+z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)\cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-z}{2}\right)}$.

192. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2)$.

193. Les fonctions de Legendre associées sont définies par

$$P_n^{(m)}(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$$

(a) Déterminer $P_3^{(2)}(z)$.

(b) Montrer que $P_n^{(m)}(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-z^2)Y'' - 2zY' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right\} Y = 0$$

(c) Montrer que $\int_{-1}^1 P_n^{(m)}(z) P_l^{(m)}(z) dz = 0$ si $n \neq l$.

C'est en cela que consiste la propriété d'orthogonalité des fonctions de Legendre associées.

Rép. (a) $15z(1-z^2)$

194. Montrer que si m , n et r sont des constantes positives,

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+r)^{m+n}} dx = \frac{B(m, n)}{r^m(1+r)^{m+n}}$$

[On pourra poser $x = (r+1)y/(r+y)$].

195. Montrer que si m , n , a et b sont des constantes positives,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta}{(a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta)^{m+n}} = \frac{B(m, n)}{2a^n b^m}$$

[On pourra poser $x = \sin^2 \theta$ dans le problème 194 et choisir r de façon convenable]

196. Montrer que (a) $\frac{z}{2} = J_1(z) + 3J_3(z) + 5J_5(z) + \cdots$

$$(b) \frac{z^2}{8} = 1^2 J_2(z) + 2^2 J_4(z) + 3^2 J_6(z) + \cdots$$

197. Si m est un entier positif montrer que

$$(a) P_{2m}(z) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} F(-m, m + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z^2)$$

$$(b) P_{2m+1}(z) = \frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^{2m} (m!)^2} z F(-m, m + \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; z^2)$$

198. (a) Montrer que $1/(\sin z)$ a un pôle simple en $z = 0$, et (b) calculer le résidu en ce pôle.

Rép. 1.

199. Montrer que $\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2 = 8\sqrt{\pi} \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdots}{5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17 \cdots}$.

200. Si $|z| < 1$, démontrer l'identité d'Euler : $(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots = \frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\cdots}$.

201. Si $|z| < 1$, montrer que $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{z^{n(3n-1)/2} + z^{n(3n+1)/2}\}$.

202. (a) Montrer que $\frac{z}{1+z} + \frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)} + \frac{z^4}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} + \cdots$ converge pour $|z| < 1$ et $|z| > 1$.

(b) Montrer que dans chacune de ces régions la série considérée représente une fonction analytique.

(c) Soit $F_1(z)$ et $F_2(z)$ les deux fonctions ainsi obtenues. $F_1(z)$ et $F_2(z)$ sont-elles prolongement analytique l'une de l'autre ? A-t-on $F_1(z) = F_2(z)$ identiquement ? Justifier les réponses.

203. (a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du domaine $|z| \leq 1$.

(b) Montrer que la fonction représentée par tous les prolongements analytiques de la série de (a) possède une singularité en $z = 1$, ceci est-il compatible avec le résultat de (a) ?

204. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ possède un cercle de convergence C de rayon fini, on désigne par $F(z)$ la fonction représentée par tous les prolongements analytiques de cette série. Montrer que $F(z)$ a au moins une singularité sur C .

205. Montrer que $\frac{\operatorname{cn} 2z + \operatorname{dn} 2z}{1 + \operatorname{cn} 2z} = \operatorname{dn}^2 z$.

206. Montrer qu'une fonction non constante ne peut avoir deux périodes dont le rapport soit un nombre irrationnel.

207. Montrer qu'une fonction non constante ne peut avoir trois périodes ou plus, indépendantes.

208. (a) Si une fonction doublement périodique est analytique en tout point d'un parallélogramme de périodes, cette fonction est constante. (b) En déduire qu'une fonction doublement périodique non constante possède au moins une singularité dans un parallélogramme de périodes.

209. Soit $F(z)$ une fonction doublement périodique. (a) Montrer que C est la frontière d'un parallélogramme de périodes alors $\oint_C F(z) dz = 0$. (b) Montrer que le nombre de pôles situés à l'intérieur d'un parallélogramme de périodes est égal au nombre de zéros chacun étant compté avec son ordre de multiplicité.

210. Montrer que les fonctions elliptiques de Jacobi $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, et $\operatorname{dn} z$ (a) ont exactement deux zéros et deux pôles dans chaque parallélogramme de périodes et (b) que chacune de ces fonctions prend exactement deux fois toute valeur donnée, dans chaque parallélogramme de périodes.

211. Montrer que $\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}\right)\left(1 + \frac{1}{9^2}\right) \cdots = \frac{\{\Gamma(1/3)\}^2}{\left\{\Gamma\left(\frac{1+i}{3}\right)\right\}^2 \left\{\Gamma\left(\frac{1-i}{3}\right)\right\}^2}$.

212. Montrer que $\int_0^{\pi/2} e^{-z \operatorname{tg} \theta} d\theta \sim \frac{1}{z} - \frac{2!}{z^3} + \frac{4!}{z^5} - \frac{6!}{z^7} + \cdots$

213. Montrer que $P_n(\cos \theta) = 2 \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right\} \left\{ \cos n\theta + \frac{1 \cdot 2n}{2 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta \right.$
 $\left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2n(2n-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \cdots \right\}$

[On peut utiliser $1 - 2t \cos \theta + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta})$.]

214. (a) Montrer que $\Gamma(z)$ est une fonction méromorphe et (b) déterminer sa partie principale en chaque pôle.

215. Si $\operatorname{Re} \{n\} > 1/2$, montrer que

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{z^n}{2^n \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt} (1 - t^2)^{n-1/2} dt \\ &= \frac{z^n}{2^n \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \end{aligned}$$

216. Montrer que $\int_0^\infty t^n J_m(t) dt = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}$.

217. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^p \theta \cos q\theta d\theta = \frac{\pi \Gamma(p+1)}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{2+p+q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+p-q}{2}\right)}$.

218. Montrer que $\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2 = 4\sqrt{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}$.

Index alphabétique

A

Abel (théorème d'), 142
Absolue convergence, 140, 141, 147, 148, 159
des produits infinis, 266, 267
des séries entières, 152
Absolue (valeur absolue d'un nombre complexe)
2, 4
valeur absolue d'un nombre réel, 2
Accélération, 69, 82, 90
Addition
(associativité de l'), 3, 8
(commutativité de l'), 3
(opération inverse de l'), 1, 3
des nombres complexes, 2, 6
des nombres réels, 1
des vecteurs, 10, 11, 15
Addition
formules d'addition pour les fonctions elliptiques, 276, 295
Aérodynamique, 224, 234
Aile d'avion, 224, 238
Aire, limitée par une courbe fermée simple, 113, 114
d'une ellipse, 113, 230
d'un parallélogramme, 6, 21
d'une région, 113, 114
d'un triangle, 201, 214
Algèbre (théorème fondamental de l'), 5, 119
démonstration à l'aide du théorème de Liouville, 125
démonstration à l'aide du théorème de Rouché, 128, 129
Algébriques
fonctions, 36
nombres, 23
Alternatifs, courants, 91
Alternées, séries, 142
Amplitude, 4
Analytique,
prolongement, 146, 159, 265, 277-279
fonction analytique et continuité, 63, 71, 72
élément d'une fonction analytique, 146, 265
fonction harmonique et fonction analytique, 131
partie imaginaire d'une fonction analytique, 84
partie réelle d'une fonction analytique, 84
partie analytique d'une série de Laurent, 144
Angle de deux vecteurs, 21
Angles (conservation des), 201, 213, 214, 229
(voir aussi Représentation conforme)
Annulaire (région), 143, 211
représentation d'un domaine annulaire, 211
Arc, 68 (voir également Courbes)
Argand (diagramme d'), 3

Argument, 4, 18
Argument (théorème de l'), 119
démonstration du, 127, 128
généralisation du, 137
Arg z (voir Argument)
Associativité de l'addition, 3, 8
de la multiplication, 3, 8
Associées (fonctions de Legendre), 305
Asymptotiques (développements), 274, 275, 288-290, 294
de l'exponentielle intégrale, 275
de la fonction d'erreur, 275
de la fonction gamma, 275, 289, 290
des fonctions de Bessel, 275, 294
de Stirling, 275
particuliers, 275
Asymptotiques (séries), 274 (voir aussi Développement asymptotique)
Attraction des charges électriques, 238
Axes, 3, 4
Axiomatiques (fondements axiomatiques de la théorie des nombres complexes, 3, 13, 14)

B

Bande (représentation conforme d'une), 205, 206, 210, 211, 219
Base de logarithmes, 35
Bernoulli (nombres de), 171, 273
Bernoulli (théorème de), 238
Bessel (équation de), 276, 271, 272, 284
Bessel (fonctions de), 161, 270, 271
de première et seconde espèces, 271
développements asymptotiques des, 275, 294
fonction génératrice des, 271
relations de récurrence pour les, 271, 286
Bêta (fonction), 222, 269, 282
relation avec la fonction gamma, 269, 282
Biharmonique (équation), 263
Bilinéaire (transformation) voir Homographique
Binôme (coefficients du), 16
Binôme (formule du), 16, 143
emploi pour les développements en série de Laurent, 157, 158
Birapport, 203, 216
invariance du, 203
Blasius (théorèmes de), 238, 250-252
Bolzano-Weierstrass (théorème de), 8, 23
Borel (théorème de Heine-Borel), 8
Borne supérieure précise, 62, 93
Bornées (fonctions), 39
suites, 141
ensembles, 7, 22, 23

Branche d'une fonction, 33
 Branchement (point de), 37, 44, 48-50, 55, 56, 67, 76, 80, 145
 d'un prolongement analytique, 265
 d'une fonction logarithmique, 46, 76, 80
 intégrale utilisant des, 185, 186, 193, 194
 Branche principale, 33, 44, 46, 48

C

Canal (représentation conforme d'un), 208, 211
 Capacité, 240, 255, 256
 Cardioïde (représentation d'une), 210, 229
 Casorati-Weierstrass (Théorème de), 145
 Cauchy (critère de convergence de), 141
 Cauchy-Goursat (théorème de), 95, 103-106 (voir aussi Théorème de Cauchy)
 démonstration pour un polygone fermé, 104, 105
 démonstration pour une courbe fermée simple, 105, 106
 démonstration pour un domaine multiplement connexe, 106
 réciproque du, (voir théorème de Morera)
 Cauchy (inégalités de), 118, 124, 169
 démonstration des, 124
 Cauchy (intégrales de), 118, 120-123
 démonstration, 120-122
 emploi dans le prolongement analytique des, 278
 pour des ouverts multiplement connexes, 123
 Cauchy-Riemann (équations de), 63, 72, 74
 démonstration des, 72, 73
 fonctions harmoniques déduites des, 73, 74
 forme polaire des, 83, 84
 gradient et, 70
 Cauchy (théorème de), 95, 103-106 (voir aussi Théorème de Cauchy-Goursat)
 conséquences du, 103
 Cavitation, 259
 Centre de gravité, 114
 Centripète (accélération), 82
 Cercle, fonctions harmoniques pour un, 119, 120
 de convergence, 140, 143, 150
 formules intégrales de Poisson pour un, 119, 129, 130, 233
 représentations d'un, 203, 204, 207, 216, 217
 unité, 5, 201
 Changement de variable dans l'intégration, 93
 Charges (distribution de), 208, 211
 Charges électriques, 238
 ligne de, 239, 240
 potentiel créé par des, (voir Potentiel)
 Christoffel-Schwarz (transformation de), 204, 218-223
 Circulaire (écoulement autour d'un obstacle), 237, 238, 246, 250
 Circulation, 234, 249
 autour d'un tourbillon, 249
 écoulement avec, 236, 249, 250

Cis θ , 4
 Coefficients du binôme, 16
 Commutativité
 de l'addition, 3, 8
 de la multiplication, 3, 8
 Compact (ensemble), 7, 22, 23
 Composition (critères de), 141
 démonstration des, 148
 Complémentaire (module d'une fonction elliptique) 276
 Complémentaire d'un ensemble, 8, 22, 23
 Composantes d'un vecteur, 10
 Composées (fonctions), 39, 65
 Condensateur, 240
 Conductivité thermique, 240
 Conducteurs, 240
 Conforme (représentation), 200, 231
 conditions de, 201
 définition de la, 201
 démonstration pour des fonctions analytiques, 213, 214
 problèmes de Dirichlet et Neumann, 233, 234
 solutions de problèmes aux limites par, 232-264
 transformation des fonctions harmoniques par, 242
 Conjuguées (coordonnées), 7, 22, 69
 expression du théorème de Green en, 95, 102, 103
 Conjuguées (fonctions), 63, 232
 Continuité, 38, 39, 53-54
 équation de, 234
 et analyticité, 63, 71, 72
 et convergence uniforme, 142, 151
 théorèmes sur la, 39
 uniforme, 39, 40, 54
 Contour, 69
 Convergence
 cercle de, 140, 143, 150
 critère de Cauchy, 141
 critères de, 141, 142, 148-150
 des produits infinis (voir Produits infinis)
 des séries, 41, 54, 55, 139, 147
 des suites, 40, 54, 55, 139, 146, 147
 rayon de, 140, 150
 région de, 139, 149, 150
 uniforme (voir Uniforme convergence)
 Coordonnées (courbes), 34
 Coordonnées
 curvilignes, 34, 42
 polaires, 4
 rectangulaires, 3, 34
 Courbe(s)
 continues par morceaux, 69
 de Jordan, 94
 de longueur infinie, 111, 112
 rectifiable, 92
 tangente à une, 69, 83
 vitesse le long d'une, 69, 82
 Cyclo ide, 113
 représentation d'une, 113
 Cylindriques (obstacles), 251, 252

D

Degré d'une équation algébrique, 5
 d'une polynôme, 34
 De Moivre (théorème de), 4, 5, 15-18
 Dénominateur, 1
 Densité, 238
 Dépendante (variable), 33
 Dérivation
 complexe, 63-91
 de fonctions de fonctions, 65, 77, 84, 85
 règles de, 65, 74-78
 sous le signe d'intégration, 174, 175, 182
 Dérivées, 63, 71, 72
 des fonctions élémentaires, 65, 66, 74-78
 des fonctions multiformes, 65, 66, 76, 77
 des séries entières, 142, 143, 152, 153
 d'ordre supérieur
 Déterminants (règle de multiplication des) 215, 230
 Diagramme d'Argand, 3
 Diélectrique (constante), 238, 256
 Différentiabilité, 63
 continuité et, 63, 71, 72
 Différentielle (équation) 91, 269, 270, 283-285
 aux dérivées partielles, 85, 86, 232
 de Bessel, 270-272, 284
 de Gauss, 273
 de Legendre, 272, 273
 point ordinaire d'une, 269
 point singulier d'une, 269, 283, 284
 solution au moyen d'intégrales d'une, 270, 284, 285
 Différentiels (opérateurs complexes), 69
 Dipôle, 237, 240
 moment d'un, 237
 Dirichlet (problème de) 232, 233, 243-245 (voir également Problème de Neumann)
 pour le demi-plan, 233
 pour le cercle unité, 233
 solution par représentation conforme, 233, 234
 unicité de la solution, 256, 257
 Discontinuités, 39
 apparentes, 39, 53
 Disjoints (ensembles), 8
 Disque unité, 201
 Distance entre deux points, 2, 4, 12
 Distributivité, 3, 9, 14
 pour des ensembles, 23
 Divergence, 70
 de fonctions, 70, 82, 83
 Divergence de suites et séries, 40, 41, 139 (voir aussi Convergence)
 Division des nombres complexes, 2
 des nombres réels, 1
 Double (pôle), 158
 Doublement périodique (fonction), 276
 Doublet, 237, 240
 Duplication (formule de duplication pour la fonction gamma), 268
 Dynamique des fluides, 234
 (voir Ecoulement fluide)

E

Ecoulement fluide
 autour d'un obstacle circulaire, 237, 238, 246, 250
 autour d'obstacles, 237, 238, 250
 dû à une source ou un puits, 237
 permanent, 234
 spécial, 236, 237
 stationnaire, 234
 superposition d', 237
 tourbillon, 249
 uniforme, 236, 245
 Egalité de nombres complexes, 2, 3
 de couples ordonnés de nombres réels, 3
 de vecteurs, 5
 Elasticité (théorie de l'), 263
 Electrique (champ), 238, 239
 Electriques (charges), 238
 Electrostatique (potentiel), 238, 239, 252-254
 sources et puits en, 240
 Elémentaires (fonctions), 34, 37, 44-48
 dérivées des 65, 66, 74-78
 Eléments d'une fonction analytique, 146, 265
 d'un ensemble, 7
 Ellipse, aire d'une, 113, 230
 représentation d'une, 209, 224
 Elliptiques (fonctions), 276, 277, 290-293
 de Jacobi, 276
 formule d'addition pour les, 276, 295
 périodes des, 276, 292, 293
 Elliptiques (intégrales), 276, 277
 (voir aussi Fonctions elliptiques)
 de première espèce, 276
 de seconde et troisième espèces, 277
 Ensembles
 compacts, 7, 22, 23
 complémentaires, 8, 22, 23
 connexes, 7, 22, 23
 dénombrables, 8, 22, 23
 éléments, 7
 intersections d', 8, 23
 orthogonaux, 287
 points extérieurs, 7
 points frontières, 7, 22, 23
 points intérieurs, 7, 22, 23
 sous-ensembles, 1, 2, 8
 union d', 8, 23
 vides, 8, 23
 Entières (fonctions), 145
 représentation sous forme de produit infini, 267
 Equation
 biharmonique, 263
 de continuité, 234
 de Laplace (voir Laplace)
 d'un cercle en coordonnées conjuguées, 22
 d'une droite, 13
 produit des racines d'une, 20
 quadratique, 19
 racines d'une, 5, 18, 20
 solutions d'une, 18
 somme des racines d'une, 20

Equations paramétriques, 41, 62
 Equipotentielles (lignes ou courbes), 235, 239, 252
 Erreur (fonction d'), 275
 développement asymptotique de la, 275
 Essentielles (singularités), 67, 80, 157
 comportement d'une fonction au voisinage d'une, 160
 définition à partir des séries de Laurent, 144
 théorèmes sur les, 145
 Euler (constante d'), 268
 Euler (formule d'), 5
 Euler (identité d'), 305
 Existence des solutions de problèmes aux limites, 232
 Exponentielle (fonction), 35
 relation avec les fonctions trigonométriques, 16, 17, 35
 Extérieur (d'une courbe fermée simple), 94
 Extérieur (point), 7

F

Factorielle (fonction) voir Fonction gamma
 Factorisation d'une équation algébrique, 5
 Familles de courbes, 68, 81
 Fermeture (propriété de), 1, 3
 d'un ensemble, 7, 22, 23
 Finie (suite), 40
 Fixe (point), 202, 217
 Fluide (voir aussi Ecoulement fluide)
 idéal, 234
 incompressible, 234
 pression dans un, 238, 251
 réel, 234
 visqueux, 234
 Flux de chaleur, 240
 lignes de, 239, 241
 Fonctions, 33, 41-50
 algébriques, 36
 analytiques (voir Analytique)
 bornées, 39
 branches de, 33
 composées, 39, 65
 conjuguées, 63, 232
 divergence de, 70, 82, 83
 doublement périodique, 276
 elliptique (voir Elliptique)
 entière, 145, 267
 exponentielle, 35
 factorielle, 268 (voir aussi Fonction gamma)
 harmonique (voir Harmonique)
 hypergéométrique, 273, 288, 293
 inverse, 33
 lacunaire, 146
 de Legendre (voir Legendre)
 logarithmique (voir Logarithmique)
 multiforme (voir Multiforme)
 de Neumann, 271, 272
 polynômiale, 34
 séries de, 146, 147
 suites de, 139, 146, 147
 transcendantes, 36, 37
 trigonométriques (voir Trigonométrie)

uniformes, 33
 uniformément continue, 39, 40
 valeur d'une, 33
 Forces (champ de), 111
 Force sur un obstacle cylindrique, 251, 252
 sur un obstacle dans un fluide, 238, 250-252
 Fourier (séries de), 170
 Fractions, 1

G

Gamma (fonction), 222, 267-269, 280-282, 294
 développement asymptotique de la, 275, 289, 290
 formule de duplication de la, 268
 prolongement analytique de la, 268, 269, 281
 relation de récurrence pour la, 268, 280
 Gauss (équation différentielle de), 273
 critère de, 142
 fonction π de, 268
 théorème de la valeur moyenne de, 119, 125
 théorème électrostatique de, 239
 Génératrice (fonction)
 des fonctions de Bessel, 271
 des polynômes de Legendre, 272
 Géométrie (série), 148, 149
 Goursat-Cauchy (voir Cauchy-Goursat)
 Gradient, 69, 70, 82, 83, 85
 comme vecteur normal d'une courbe, 70, 83
 égalités utilisant le, 70
 Graphique (représentation)
 des nombres complexes, 3, 4, 10-13
 des nombres réels, 1
 des racines, 18, 19
 Green (première et deuxième identités de), 117
 Green (théorème de)
 dans le plan, 95, 99-102
 démonstration du théorème de Cauchy à l'aide du, 103
 démonstration pour des domaines multiplement connexes du, 101
 démonstration pour des domaines simplement connexes du, 99, 100
 en coordonnées conjuguées, 95, 102, 103
 généralisation du, 114

H

Hardy, 274
 Harmonique (fonction), 63, 64, 70, 73, 74, 85, 232, 233, 241-243
 déduite des équations de Cauchy-Riemann, 73, 74
 et formules intégrales de Poisson
 pour un cercle, 119, 120
 pour un demi-plan, 120
 relation avec les fonctions analytiques, 131
 transformation par représentation conforme, 242
 Heine-Borel (théorème de), 8
 Hexagone (représentation d'un), 230
 Holomorphe, 63 (voir aussi Analytique)
 Homographique (transformation), 35, 203, 216, 217

birapport d'une, 203, 216
 transformation de cercles en cercles à l'aide
 d'une, 217
 utilisation dans la représentation d'un cercle sur
 un demi-plan, 203, 204, 216, 217
 Hydrodynamique, 234
 Hyperbole, représentation d'une, 228
 Hyperboliques (fonctions), 35
 inverses des, 36, 48
 propriétés des, 35, 46
 relations avec les fonctions trigonométriques,
 36
 Hypergéométrie
 équation différentielle, 273
 fonction, 273, 288, 293
 série, 169
 Hypocycloïde, 113, 114
 représentation d'une, 228

I

Idéal (fluide), 234
 Imaginaire (axe), 4
 Imaginaire (partie)
 d'une fonction analytique, 84
 d'un nombre complexe, 2
 Incompressible (fluide), 234
 Indéfinie (intégrale), 95, 107
 Indéterminée (forme) (voir règle de L'Hospital)
 Induction mathématique, 16
 Infini, 38
 point à l', 6, 38, 47, 80, 81
 singularité à l', 68, 145
 Infinis (produits), 266, 267, 279, 280, 293, 294
 convergence des, 266, 267
 regroupement des termes des, 266
 théorèmes importants sur les, 267
 Intérieur d'une courbe fermée simple, 94
 Intégrale, curviligne, 92
 dérivation d'une, 174, 175, 182
 elliptique, 276, 277 (voir Fonction elliptique)
 exponentielle, 275
 Intégrale, prolongement analytique d'une, 265,
 279
 de fonctions particulières, 96, 109, 110
 évaluation par la méthode des résidus, 173, 174,
 179-188, 193
 valeur principale de Cauchy d'une, 174
 Intérieur d'une courbe fermée simple, 94
 Intérieur (point), 7, 22, 23
 Intersection d'ensembles, 8, 23
 Intervalle fermé, 2
 ouvert, 2
 Inverses (fonctions), 33
 hyperboliques, 36, 48
 trigonométriques, 36, 48
 Inversion, 202, 217
 Involution (transformation), 230
 Irrationnels (nombres), 1
 Irrégulier (point singulier), 269, 283, 284
 Isogonale (transformation), 201
 Isolée (singularité), 67, 79, 80, 144
 comportement d'une fonction analytique dans
 le voisinage d'une, 160
 Isothermes (lignes), 241

J

Jacobi (fonctions elliptiques de), 276
 Jacobien, d'une transformation, 200, 214-216
 d'une transformation conforme, 214-216
 Jensen (théorème de), 138
 Jordan (courbe de), 94
 Joukowski (profil de), 224
 Joukowski (transformation de), 224, 229

L

Lacunaire (fonction), 146
 Lagrange (développement de), 145, 159
 Landen (transformation de), 304
 Laplace (équation de), 63, 64, 232, 233
 et problèmes de Dirichlet et Neumann, 232,
 233
 sous forme polaire, 84
 Laplace (méthode de), 275
 Laplacien, 63, 70, 82, 83
 Laurent (série de), 143, 144
 classification des singularités d'après la, 114,
 145, 157, 158
 développement d'une fonction en, 133, 144,
 155-158
 partie analytique d'une, 144
 partie principale d'une, 144
 résidus et, 172
 Laurent (théorème de), 143, 144, 155-157
 démonstration du, 155-157
 Legendre (équation différentielle de), 272
 solution générale de l', 272, 273
 Legendre (fonctions de), 272, 273, 287, 288
 associées, 305
 propriété des, 272
 Legendre (polynômes de), 161, 162, 272, 293
 fonction génératrice des, 272
 formule de Schlaefli pour les, 161, 162
 orthogonalité des, 287
 relation de récurrence pour les, 272, 287, 288
 relation avec la fonction hypergéométrique,
 293
 Leibnitz (règle de), 174, 175, 182
 Lemniscate, représentation d'une, 229
 L'Hospital (règle de), 67, 78, 79
 emploi dans le calcul de résidus, 177
 Limite (point), 7, 22, 23
 Limites, 37, 38, 50-53
 de fonctions, 37, 38, 50-53
 de suites, 40, 51-53, 55 (voir aussi suites)
 interprétation géométrique des, 50
 théorème sur les, 38, 51-53
 unicité des, 38, 40, 51, 140
 Linéairement indépendantes (solutions des équa-
 tions différentielles), 269, 270
 Linéaire (transformation), 34, 203
 Ligne, équipotentielle, 235, 239, 252
 isotherme, 241
 Liouville (théorème de), 119, 124, 125, 145
 théorème fondamental de l'algèbre et, 125
 Logarithmique (fonction), 36, 46
 branche principale de, 36, 46
 point de branchement d'une, 46, 76, 80
 relation avec les fonctions hyperboliques, 36

M

- Maclaurin (série de), 143
- Maximum (théorème du module), 119, 125, 126
- Méromorphe (fonction), 145
- Minimum (théorème du module), 119, 126, 127
- Mittag-Leffler (théorème de), 175, 191, 192
- Module, de nombres complexes, 4
 - de fonctions elliptiques, 276
- Moment d'un dipôle, 237
 - des forces de pression, 238, 251
- Monotones (suites), 141
- Morera (théorème de), 95, 110, 111, 118, 160
 - utilisation dans le prolongement analytique, 278
- Moyenne (théorème de Gauss sur la valeur), 119, 125
- Multiforme (fonction), 33, 37, 43, 44, 67, 76
 - dérivée d'une, 65, 66, 76, 77
- Multiplication
 - associativité de la, 3, 8
 - commutativité de la, 3, 8
 - élément neutre de la, 3
 - inverse de la, 1, 3
- Multiplement connexe (domaine), 93, 94
 - Théorème de Cauchy-Goursat pour des, 106
 - Théorème de Green pour des, 101

N

- Népériens (logarithmes), 35, 36
- Neumann (fonction de), 271, 272
- Neumann (problème de), 232, 233, 243-245
 - solution par représentation conforme, 234, 235
 - solution par le problème de Dirichlet, 262
 - unicité de la solution du, 262
- Nombres, 1
 - algébriques, 1
 - de Bernoulli, 171, 273
 - irrationnel, 1
 - premier, 274
 - réel, 1
 - théorie des, 273
 - transcendants, 23

O

- Obstacles, écoulement autour d', 237, 238, 250
 - forces agissant sur un obstacle cylindrique, 251, 252
- Opérateur, 17, 82
 - de dérivation, 65
 - Laplacien, 63, 70, 82, 83
- Ordre, d'un pôle, 67, 144
 - d'un zéro, 67
- Ordinaire (point), 67, 269
 - d'une équation différentielle, 269
- Origine, 1
- Orthogonale (famille) 68, 81
- Orthogonalité
 - des fonctions de Legendre associées, 305
 - des polynômes de Legendre, 287
- Ouvert (ensemble), 7, 22, 23

P

- Parabole, représentation d'un domaine limité par une, 208, 210, 228
- Parallèles (vecteurs), 6
- Parallélogramme, aire d'un, 6, 21
 - des périodes, 276, 293
 - diagonales d'un, 12
- Paramétriques (équations), 13, 41, 68
 - utilisation pour les représentations conformes, 205, 221, 228
- Partielles (sommes partielles d'une série), 40, 139
- Période de la fonction exponentielle, 45
- Périodes, des fonctions elliptiques, 276, 292, 293
 - parallélogramme des, 276, 293
- Picard (théorème de), 145
- Planètes (mouvement des), 82
- Point à l'infini, 6, 38, 47, 80, 81
- Points, critiques, 201, 214
 - distance entre deux, 2, 4, 12
 - extérieurs, 7
 - ordinaires, 67, 269
- Poisson (formules intégrales de)
 - pour un cercle, 119, 129, 130, 233
- Polaire (forme)
 - des équations de Cauchy-Riemann, 83, 84
 - des nombres complexes, 4, 14, 15
 - de l'équation de Laplace, 84
- Polaires (coordonnées), 4
- Pôles, 67, 79, 157, 158
 - définis à partir des séries de Laurent, 144
 - doubles, 158
 - nombre de, 119
 - ordre des, 67, 144
 - simples, 67, 80
- Polygone (représentation sur)
 - le cercle unité, 220, 221
 - un demi-plan, 204, 218, 219, 223
- Polynôme de Legendre (voir Legendre)
- Polynomiales (équations), 5, 19, 20, 23, 36
 - degré des, 5
 - factorisation des, 5
 - théorème fondamental de l'algèbre pour les, 5, 119, 125, 128, 129
- Potentiel, 238, 252, 253
 - complexe, 235, 245-250
 - créé par une charge et un plan, 253
 - créé par une charge entre deux plans parallèles, 253, 254
 - des vitesses, 234, 235
 - électrostatique, 238, 239, 252-254
- Pression (dans un fluide), 238, 251
- Premier (nombre), 274
- Principale (branche), 33, 44, 46
 - des fonctions hyperboliques inverses, 48
 - des fonctions logarithmiques, 36
 - des fonctions trigonométriques, 48
- Principale (valeur), 4, 33
 - des intégrales, 174
 - des logarithmes, 36, 46
- Produits infinis, 266, 267, 279, 280, 293, 294
 - convergence des, 266, 267
 - modification de l'ordre des termes dans les, 266
 - particuliers, 267, 280

Produit, extérieur, 6, 20, 21, 70
 scalaire, 6, 21, 70, 82, 83
 Profil de Joukowski, 224
 Prolongement analytique, 146, 159, 265, 277-279
 de la fonction gamma 268, 269, 281
 de la fonction zêta 273
 d'intégrales, 265, 279
 de séries, 146, 159, 265, 279
 intégrales de Cauchy et, 278
 théorème de Morera et, 278
 théorème d'unicité, 265
 Projection stéréographique, 6, 229
 Puits, 235, 236, 240 (voir aussi Sources)

Q

Quadratique (équation), 19

R

Raabe (critère de), 141
 Racines (nombre des racines d'une équation), 129
 Rayon de convergence, 140, 150
 Réel (nombre), 1
 Représentation conforme, 33, 41-43, 200
 d'un canal, 208, 211
 d'un demi-cercle, 206, 207
 d'un demi-plan sur un cercle, 203
 d'un domaine limité par
 une cardioïde, 210, 229
 une cycloïde, 228
 une ellipse, 209, 221, 224
 un hexagone, 230
 une hyperbole, 228
 une hypocycloïde, 228
 une lemniscate, 229
 une lunule, 207
 une parabole, 208, 210, 228
 un polygone, 204, 218-221, 223
 un rectangle, 209-211
 un secteur circulaire, 205, 207
 un triangle, 209, 221, 222
 Résidus 172, 173, 176-179
 calcul des, 172, 173, 176-179
 calcul d'intégrales par la méthode des, 133,
 173, 174, 179, 188, 193
 Résidus (théorème des), 173, 176-179
 Riemann-Cauchy (voir Cauchy-Riemann)
 Riemann
 conjecture de, 274
 théorème sur la représentation conforme de,
 201, 202, 233
 sphère de, 6
 fonction zêta de, 273, 274, 288
 Rodrigue (formule de), 161
 Rotationnel, 70, 82, 83, 95
 Rouché (théorème de), 119, 128
 démonstration du, 128

S

Scalaire (produit), 6, 21, 70, 82, 83

Schlaefli (formule de), 161, 162
 Schwarz-Christoffel (transformation de), 204, 218-223
 Schwarz (inégalité de), 32
 principe de symétrie de, 266, 279
 théorème de, 132
 Semi-convergence
 de produits infinis 266, 267
 de séries, 140, 141
 Séries 40, 41, 54, 55, 57, 139-171
 absolue convergence des, 140, 141, 147, 148,
 152, 159
 alternées, 142
 asymptotiques, 274
 convergence des, 41, 54, 55, 139, 147
 convergence uniforme des, 140, 147, 148
 de fonctions, 146, 147
 de Fourier, 170
 de Maclaurin, 143
 de Mittag-Leffler, 175, 191, 192
 dérivation des, 142, 143, 152, 153
 géométriques, 148, 149
 hypergéométriques, 169
 rayon de convergence des – entières, 140, 150
 Suites 40, 54, 55, 57, 139, 146, 147
 bornées, 141
 convergence des, 40, 54, 55, 140, 147, 148
 divergentes, 40
 limite des 40, 51-53, 55
 monotones, 141
 Simples (courbes fermées), 68, 93
 Simples (pôles) 67-80
 zéros, 67
 Simplement connexe (ouvert), 93, 94
 Singularité
 d'une équation différentielle 269, 283
 et convergence des séries entières, 143, 146
 fonction analytique au voisinage d'une, 160
 intégration autour d'une, 184
 isolée, 67, 79, 80, 144, 167
 Solutions linéairement indépendantes
 d'une équation, 18
 d'une équation différentielle, 269, 270
 Sommes de séries, 175, 188-191
 Sources, électrostatiques, 240
 en écoulement de fluides, 235-237, 247, 248
 force de, 236, 247
 ligne de, 235, 247, 252
 Sphère de Riemann, 6
 Stationnaire (écoulement), 234
 Stéréographique (projection), 6, 229
 Stirling (formule asymptotique de), 275
 Superposition d'écoulement, 237
 Surfaces de Riemann, 37, 48-50, 265
 Symétrie (principe de), 266, 279

T

Tangente à une courbe, 69, 83
 Taylor (série de) 143, 153-155
 théorème de, 143, 153-155
 Température, complexe 240, 241
 état permanent de, 240, 254, 255, 257, 258

Termes, d'une suite, 40
 changement, dans une série, de l'ordre des, 141
 Thermique, conductivité, 240
 Trajectoires orthogonales, 81
 Transcendantes, fonctions, 36, 37
 Transcendants, nombres, 23
 Transformations
 conformes (voir Conforme)
 inversion, 202, 217
 jacobien des, 200, 201, 214-216
 points invariants des, 202, 217
 rotation, 202, 212-214, 217
 de Schwarz-Christoffel, 204, 218-223
 Translation, 202, 212, 217
 Triangle (représentation conforme d'un), 209, 221, 222
 Trigonométriques (fonctions), 35
 branches principales des, 48
 relation avec les fonctions hyperboliques, 36
 zéros des, 45

U

Uniforme, continuité, 39, 40, 54
 Uniforme (convergence), 140, 142, 147, 148, 150-153, 160
 des produits infinis, 266, 267
 des séries, 140, 147, 148
 des séries entières, 142, 152, 153
 et continuité 142, 151
 Uniforme (écoulement), 236, 245
 Unicité, de limites, 38, 40, 51, 140
 des solutions du problème de Dirichlet, 256, 257
 des solutions du problème de Neumann, 262
 théorème d'unicité pour le prolongement analytique, 265
 Unité, cercle, 5, 201
 formule intégrale de Poisson pour le, 119, 129, 130, 233
 problème de Dirichlet pour le, 233
 représentation sur le, 203, 204, 207, 216, 217
 Unité, disque, 201
 Unité, sphère, 6
 Unité (racine n -ième de 1) 5, 21

V

Valeur absolue d'une fonction, 33
 Variables, 2, 33
 changements de, 93
 complexes, 2, 33
 dépendantes, 33
 indépendantes, 33
 réelles, 2
 Vecteurs, 5, 10-13
 addition des, 10, 11, 15
 angles de, 21
 égalité de, 5
 extrémités de, 5
 interprétation des nombres complexes comme, 5
 normaux à une courbe, 70, 83
 parallèles, 6
 perpendiculaires, 6
 rotation de, 14, 15, 17
 Vitesse, le long d'une courbe, 69, 82
 complexe, 235
 potentiel des, 2, 34, 245
 Visqueux (fluide), 234
 Voisinage, 7, 22

W

Weierstrass (théorème de factorisation de), 267, 282
 Weierstrass - Bolzano (théorème de), 8, 23
 Weierstrass - Casorati (théorème de), 145
 Weierstrass (critère de), 142, 150, 151
 pour les produits infinis, 267

Z

Zéros, des fonctions trigonométriques, 45
 des polynômes 5, 20
 nombre de, 119
 ordre des, 67
 simples, 67
 Zêta (fonction zêta de Riemann), 273, 274, 288
 prolongement analytique de la fonction, 273